

Chapter 2

Degrés de Liberté Discrets: Polarisation et Spin

2.1 Polarisation des ondes électromagnétiques

Les équations de Maxwell dans le vide possèdent des solutions qui sont des ondes planes. Pour une onde plane se propageant dans la direction z les champs électriques \vec{E} et magnétiques \vec{B} sont perpendiculaires à la direction de propagation

$$\vec{E} = \Re \left\{ \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right\} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E} \quad (2.1)$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$ et $\lambda\nu = c$ la vitesse de la lumière. Il suffit de considérer le vecteur \vec{E} car \vec{B} est automatiquement \perp à \vec{E} .

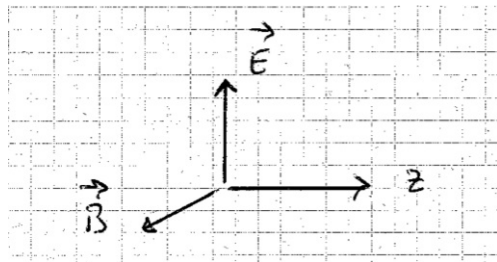


Figure 2.1: Directions des champs électrique et magnétique

En général $\vec{E}_0 = E_0 ((\cos \theta)e^{i\delta_x}; (\sin \theta)e^{i\delta_y}; 0)$. L'orientation de \vec{E} dans le plan \perp à z s'appelle la polarisation de l'onde. On peut toujours poser $\delta_x = 0$ et garder le paramètre δ_y ouvert (cela revient à changer l'origine du

temps). Il est possible de montrer que pour z fixé le vecteur champ électrique $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$ trace une ellipse en fonction du temps dans le plan $xy \perp z$. Ici nous allons considérer uniquement quelques cas particuliers importants.

Soit $\delta_x = 0$ et $\delta_y = 0$. On a pour $z = 0$

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos(\omega t) \quad (2.2)$$

Puisque $\frac{E_y}{E_x} = \tan \theta$, le champ électrique oscille le long de la direction θ ou bien $-\theta$. C'est ce que l'on appelle la polarisation linéaire le long de θ .

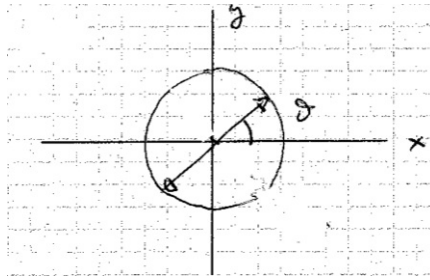


Figure 2.2: Polarisation linéaire le long de θ

Considérons le cas $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\delta_x = 0$ avec $\delta_y = \frac{\pi}{2}$ ou bien $\delta_y = -\frac{\pi}{2}$. Le champ électrique devient :

$$\vec{E} = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \pm \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Cette fois $E_y^2 + E_x^2 = E_0^2$ donc le champ électrique effectue un mouvement circulaire droite ou gauche.

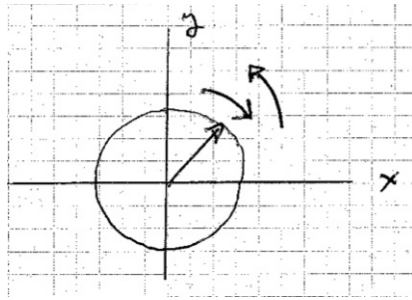


Figure 2.3: Mouvement circulaire du champ électrique

Le cas général (θ, δ_y) quelconque (on peut toujours prendre $\delta_x = 0$) est celui de la polarisation elliptique : le champ électrique parcourt une ellipse dans la direction droite ou gauche. Les cas linéaires et circulaires sont des formes dégénérées de l'ellipse. On peut mettre en évidence la polarisation des ondes électromagnétiques grâce à des filtres. Par exemple un "**polarisateur linéaire**" permet de sélectionner la composante du champ électrique dans une direction donnée disons θ . Symboliquement :

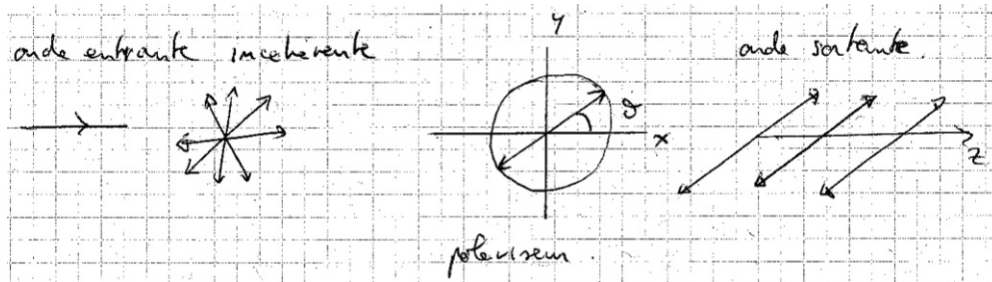


Figure 2.4: Polariseur linéaire

Le champ électrique sortant est simplement la composante du champ entrant le long de θ . Donc le champ de l'onde sortante est ici (en $z = 0$ mettons)

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

On peut placer un "deuxième filtre en série" le long de la direction α . Celui-ci s'appelle un "analyseur" car il sert à analyser la polarisation de l'onde.

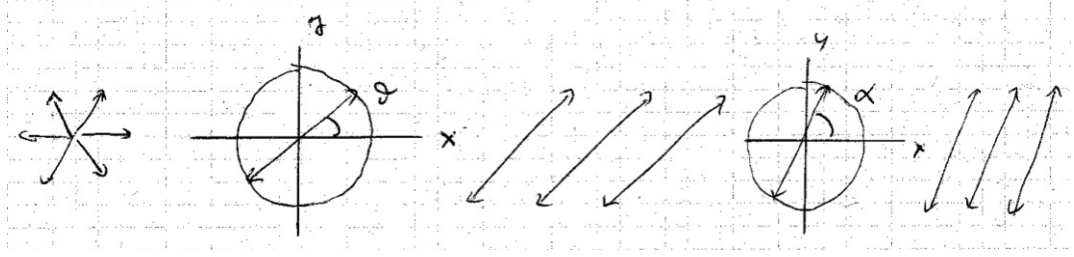


Figure 2.5: Analyseur

L'onde transmise par l'analyseur possède un champ électrique dans la direction α . Celui-ci est simplement la composante du champ entrant dans la direction α .

$$\vec{E} = E_0 \cos(\alpha - \theta) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Ici l'amplitude est obtenue en faisant le produit scalaire

$$(\cos \alpha, \sin \alpha) \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta = \cos(\alpha - \theta) \quad (2.6)$$

L'intensité de l'onde avant l'analyseur (et après le premier polariseur) est $\sim E_0^2$ alors que celle après l'analyseur est $\sim E_0^2 (\cos(\alpha - \theta))^2$. Le rapport des intensités transmises et incidentes est donc

$$\cos^2(\alpha - \theta) \quad (2.7)$$

C'est la loi de **Malus**.

2.2 Polarisation du photon

Le photon possède un "degré de liberté interne" qui ressemble à la polarisation du champ électrique. C'est ce qui s'appelle la "polarisation du photon".

Au premier chapitre nous avons introduit le concept de fonction d'onde. En particulier l'onde plane associée à une particule libre se propageant dans la direction z $\psi(z, t) = A e^{i(kz - \omega t)}$. Pour des photons cette fonction d'onde est à valeurs vectorielles tout comme le champ électrique :

$$A e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ (\sin \theta) e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Ici nous avons posé $\delta_x = 0$ et $\delta_y = \phi$ comme il est usuellement fait pour des photons.

Le choix $\phi = 0, \pi$ correspond à un photon avec la polarisation linéaire dans la direction θ ou θ_\perp et $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ correspond à un photon avec polarisation circulaire droite ou gauche.

En notation de Dirac l'état général d'un photon libre est :

$$e^{i\omega t}|k\rangle \otimes (\cos\theta|x\rangle + (\sin\theta)e^{i\phi}|y\rangle). \quad (2.9)$$

La correspondance avec la notation usuelle est

$$|k\rangle \leftrightarrow e^{ikz}; \quad |x\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |y\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

En fait on posera $|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et l'on fera abstraction de la composante z qui est toujours nulle.

Dans ce chapitre nous nous intéressons uniquement au "degré de liberté de polarisation" du photon:

$$|\theta, \phi\rangle = \cos\theta|x\rangle + (\sin\theta)e^{i\phi}|y\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ (\sin\theta)e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

et laissons tomber le "degré de liberté orbital" $|k\rangle$. Nous laissons aussi tomber la dépendance temporelle $e^{i\omega t}$. Ces vecteurs forment l'espace vectoriel \mathbb{C}^2 et satisfont $\langle\theta, \phi|\theta, \phi\rangle = 1$. Pour vérifier cela on utilise

$$\langle\theta, \phi| = \cos\theta\langle x| + e^{-i\phi}\sin\theta\langle y| \quad (2.12)$$

et

$$\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1, \quad \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0. \quad (2.13)$$

On peut aussi le vérifier en composante grâce à :

$$\langle x| = (1, 0) \quad , \quad \langle y| = (0, 1) \quad (2.14)$$

et

$$\langle\theta, \phi| = (\cos\theta, e^{-i\phi}\sin\theta). \quad (2.15)$$

Les états de polarisation linéaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \\ |\theta_\perp\rangle = \cos\theta_\perp|x\rangle + \sin\theta_\perp|y\rangle = \sin\theta|x\rangle - \cos\theta|y\rangle = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.16)$$

forment une base orthonormée pour \mathbb{C}^2 . Ceci est aussi le cas pour les deux états de polarisation circulaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} |R\rangle = |x\rangle + i|y\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\ |L\rangle = |x\rangle - i|y\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

2.3 Expériences sur la polarisation des photons

Nous allons maintenant considérer une source de photons uniques préparés dans l'état $|\theta\rangle$ de polarisation linéaire. Cela peut par exemple être réalisé grâce à une source de très basse intensité devant laquelle on place un filtre polarisateur placé selon l'angle θ .

2.3.1 Photodétection après un analyseur

Les photons uniques sont envoyés sur un analyseur α puis enregistrés dans un photodétecteur D .

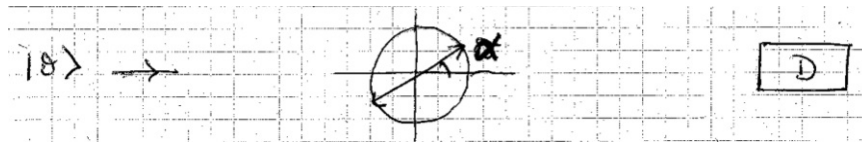


Figure 2.6: Analyseur et photodétecteur

L'observation expérimentale est la suivante: le photodétecteur enregistre 1 ou 0 photons. C'est-à-dire que le photon traverse l'analyseur α ou bien est absorbé et ne parvient pas à D . Si l'expérience est répétée plusieurs fois on observe une séquence aléatoire

$$100101110010101 \quad (2.18)$$

et il n'est pas possible de prévoir si le photon traverse ou non l'analyseur. La deuxième observation expérimentale est la fréquence empirique des 1: la probabilité empirique de voir un photon dans le photodétecteur D est

$$\cos^2(\theta - \alpha). \quad (2.19)$$

Ces observations peuvent être expliquées très facilement grâce à la règle de Born introduite au chapitre 1. L'état du photon avant l'analyseur est $|\theta\rangle$. Le système analyseur + détecteur joue ici le rôle d'appareil de mesure. Si le détecteur enregistre un photon c'est que celui-ci est observé dans l'état $|\alpha\rangle$ (il a traversé l'analyseur). La probabilité de transition est :

$$\text{Prob} (|\theta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle) = |\langle\alpha|\theta\rangle|^2 \quad (2.20)$$

en vertu de la règle de Born, il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\theta\rangle &= (\cos\alpha\langle x| + \sin\alpha\langle y|)(\cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle) \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\theta + \sin\alpha \cdot \sin\theta \\ &= \cos(\alpha - \theta). \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.3.2 Décomposition par une lame biréfringente

Une lame biréfringente décompose la lumière en deux parties. L'une possède une polarisation verticale et l'autre une polarisation horizontale.

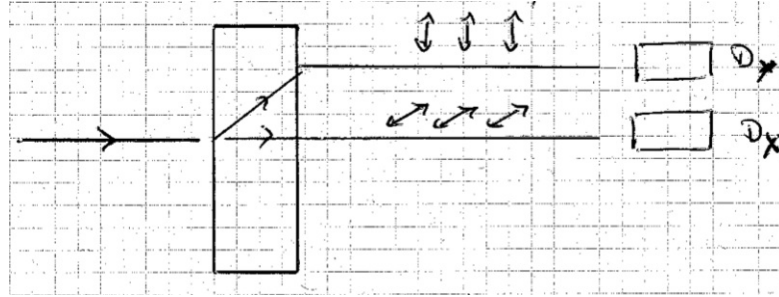


Figure 2.7: lame biréfringente

Pour une onde avec champ électrique

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Re \{ e^{i(kz - \omega t)} \} \quad (2.22)$$

On obtient deux ondes après la lame biréfringente :

$$E_y = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Re \{ e^{i(kz - \omega t)} \} \quad (2.23)$$

et

$$E_x = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Re \{ e^{i(kz - \omega t)} \} \quad (2.24)$$

L'intensité mesurée dans les deux détecteurs (divisée par l'intensité incidente) est pour $D_y \sim \sin^2 \theta$ et pour $D_x \sim \cos^2 \theta$. La somme des intensités est égale à l'intensité totale incidente.

Que se passe-t-il si on envoie des photons uniques? On observe que D_x ou D_y enregistre un photon; ces événements sont exclusifs. Si la séquence des enregistrements pour D_x est:

$$1010011010101, \quad (2.25)$$

pour D_y elle est:

$$0101100101010. \quad (2.26)$$

Ces séquences sont complémentaires mais aléatoires. on peut seulement connaître la statistique des 1 et 0. La probabilité empirique d'observer 1 dans D_x est $\cos^2 \theta$ et elle est $\sin^2 \theta$ pour D_y .

L'interprétation quantique de ce résultat est la suivante. Avant la lame biréfringente l'état du photon est $|\theta\rangle$. Après la lame biréfringente l'état orbital est différent (il existe "deux chemins possibles") mais l'état de polarisation est toujours $|\theta\rangle = \cos \theta|x\rangle + \sin \theta|y\rangle$. La probabilité d'enregistrer un photon dans D_x est la probabilité d'observer une polarisation $|x\rangle$:

$$\text{Prob} (|\theta\rangle \rightarrow |x\rangle) = |\langle x|\theta\rangle|^2 = \cos^2 \theta \quad (2.27)$$

La probabilité d'enregistrer un photon dans D_y est la probabilité d'observer une polarisation $|y\rangle$:

$$\text{Prob} (|\theta\rangle \rightarrow |y\rangle) = |\langle y|\theta\rangle|^2 = \sin^2 \theta \quad (2.28)$$

2.3.3 Décomposition - Recombinaison

Cette fois-ci au lieu d'observer les photons juste après la lame biréfringente, on recombine l'onde (ou les photons) grâce à une lame symétrique. Ensuite on analyse les photons avec le système analyseur α + détecteur.

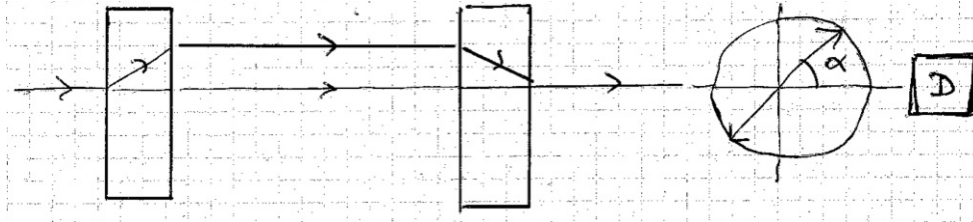


Figure 2.8: Décomposition et recombinaison

Si l'expérience est faite avec une onde électromagnétique, celle-ci est d'abord décomposée entre les lames, puis recomposée. Après la deuxième lame le champ électrique est donné par la superposition

$$E_x + E_y = \Re \{ e^{i(kz - \omega t)} \} E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Après l'analyseur l'intensité enregistrée dans le détecteur sera donc $\cos^2(\theta - \alpha)$.

Avec des photons uniques on enregistre ou non un photon dans le détecteur. A nouveau lorsque l'expérience est répétée on obtient une suite aléatoire de 1 et 0. La fréquence empirique des 1 est $\cos^2(\theta - \alpha)$.

Ce résultat est "évident" si l'on accepte l'interprétation quantique. En effet après la seconde lame biréfringente l'état du photon est $|\theta\rangle$ (à nouveau!). La probabilité que celui-ci soit détecté par l'appareil $\alpha + D$ est donc

$$\text{Prob}(|\theta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle) = |\langle\alpha|\theta\rangle|^2 = \cos^2(\alpha - \theta). \quad (2.30)$$

Il est instructif de faire un calcul "purement classique" en supposant que les photons se comportent comme des particules classiques ayant des trajectoires et des polarisations uniques bien définies. Nous allons voir que le résultat n'est pas en accord avec l'expérience.

Si la "particule" est classique elle suit le chemin supérieur avec probabilité $\sin^2\theta$ et le chemin inférieur avec probabilité $\cos^2\theta$. Quand elle suit le chemin supérieur sa polarisation est "y" et la probabilité de détection après l'analyseur doit être $\cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin^2\alpha$. Quand elle suit le chemin inférieur sa polarisation est "x" et la probabilité de détection après l'analyseur doit être $\cos^2(0 - \alpha) = \cos^2\alpha$. Ainsi:

$$\begin{aligned} \text{Prob(détection)} &= \text{Prob(détection | chemin sup)}\text{Prob(chemin sup)} \\ &+ \text{Prob(détection | chemin inf)}\text{Prob(chemin inf)} \\ &= \sin^2\theta \sin^2\alpha + \cos^2\theta \cos^2\alpha \\ &\neq (\cos(\theta - \alpha))^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

La différence entre le résultat d'une interprétation classique et le (vrai) résultat quantique est égale à $2 \sin\theta \sin\alpha \cos\theta \cos\alpha$. En effet:

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta - \alpha) &= (\cos\theta \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha)^2 \\ &= \cos^2\theta \cos^2\alpha + \sin^2\theta \sin^2\alpha + 2 \cos\theta \sin\theta \cos\alpha \sin\alpha. \end{aligned} \quad (2.32)$$

La situation est en fait très similaire à l'expérience des fentes de Young. Le terme qui est absent dans le calcul classique est un terme d'interférence entre les "deux chemins possibles": avant d'être observés dans le photodétecteur les photons ont un comportement ondulatoire et on ne peut pas leur associer des trajectoires et des états de polarisations "x" et "y" bien définis. Leur état est $|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle$ tant qu'ils ne sont pas détectés.

2.4 Observables associées à la polarisation

Reprenons l'expérience de photodétection avec le système Analyseur + Détecteur.

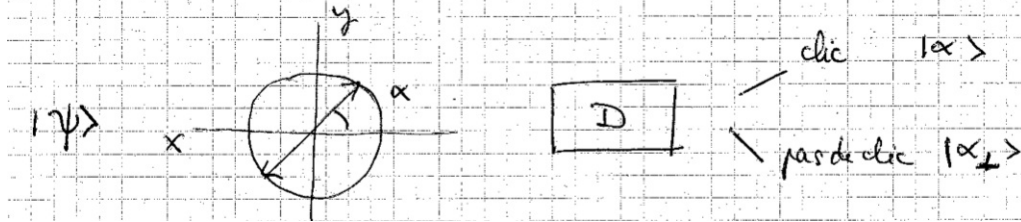


Figure 2.9: Expérience de photodétection

Nous avons vu que si le photon entrant est dans l'état $|\theta\rangle$ la $\text{Prob}(\text{clic}) = \cos^2(\theta - \alpha) = |\langle \alpha | \theta \rangle|^2$ et la $\text{Prob}(\text{pas de clic}) = \sin^2(\theta - \alpha) = |\langle \alpha_\perp | \theta \rangle|^2$. Le clic détecte une transition $|\theta\rangle \rightarrow |\alpha\rangle$ et l'absence de clic détecte une transition $|\theta\rangle \rightarrow |\alpha_\perp\rangle$. Nous pouvons enregistrer les résultats de l'expérience dans une variable (aléatoire) $p_\alpha = +1$ (clic) et $p_\alpha = -1$ (pas de clic). La valeur moyenne de cette variable aléatoire est

$$\mathbb{E}[p_\alpha] = (+1)|\langle \alpha | \theta \rangle|^2 + (-1)|\langle \alpha_\perp | \theta \rangle|^2 \quad (2.33)$$

Plus généralement si l'état entrant dans le système Analyseur + Détecteur est $|\psi\rangle$ un état de $\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; a \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$ on a:

$$\mathbb{E}[p_\alpha] = (+1)|\langle \alpha | \psi \rangle|^2 + (-1)|\langle \alpha_\perp | \psi \rangle|^2 \quad (2.34)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\mathbb{E}[p_\alpha] = (+1)\langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle + (-1)\langle \psi | \alpha_\perp \rangle \langle \alpha_\perp | \psi \rangle \quad (2.35)$$

(Ici on utilise $\overline{\langle \alpha | \psi \rangle} = \langle \psi | \alpha \rangle$ qui est une propriété du produit scalaire). En d'autres termes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p_\alpha] &= \langle \psi | (|\alpha\rangle\langle \alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle \alpha_\perp|) | \psi \rangle \\ &\equiv \langle \psi | P_\alpha | \psi \rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

où on a **défini** "l'observable polarisation"

$$P_\alpha = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|. \quad (2.37)$$

Avant de discuter la signification physique de P_α , nous discutons sa signification mathématique. Ici $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ est un ket fois un bras c'est-à-dire un vecteur fois son transposé: ceci est un projecteur sur le vecteur $|\alpha\rangle$. De même $|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$ est un projecteur sur $|\alpha_\perp\rangle$. Ces projecteurs ne sont rien d'autre que des matrices:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} (\cos \alpha \quad \sin \alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| &= \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} (-\sin \alpha \quad \cos \alpha) \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

et donc

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

On peut vérifier que cette matrice possède les valeurs propres ± 1 associées aux vecteurs propres $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et $|\alpha_\perp\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$. C'est-à-dire:

$$P_\alpha|\alpha\rangle = (+1)|\alpha\rangle \quad (2.41)$$

$$P_\alpha|\alpha_\perp\rangle = (-1)|\alpha_\perp\rangle \quad (2.42)$$

En fait il est très instructif de faire cette vérification en notation de Dirac plutôt qu'en travaillant avec le tableau matriciel.

$$\begin{aligned}
P_\alpha|\alpha\rangle &= (|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|)|\alpha\rangle \\
&= |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha\rangle}_1 - |\alpha_\perp\rangle \underbrace{\langle\alpha_\perp|\alpha\rangle}_0 \\
&= |\alpha\rangle
\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}
P_\alpha|\alpha\rangle &= (|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|)|\alpha_\perp\rangle \\
&= |\alpha\rangle \underbrace{\langle\alpha|\alpha_\perp\rangle}_0 - |\alpha_\perp\rangle \underbrace{\langle\alpha_\perp|\alpha_\perp\rangle}_1 \\
&= -|\alpha_\perp\rangle
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Quelle est l'interprétation physique de la matrice ou "observable" P_α ? Cette matrice caractérise la quantité mesurée, ici "la polarisation du photon dans les directions (α, α_\perp) ". L'appareil qui sert à mesurer cette quantité est l'Analyseur + Détecteur. Le résultat de la mesure est donné par les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice. Ici il y a deux résultats possibles $(+1, |\alpha\rangle)$ et $(-1, |\alpha_\perp\rangle)$. La probabilité d'obtenir $(+1, |\alpha\rangle)$ est $|\langle\alpha|\psi\rangle|^2$ ou bien $\langle\psi|\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle$. La probabilité d'obtenir $(-1, |\alpha_\perp\rangle)$ est $|\langle\alpha_\perp|\psi\rangle|^2$ ou bien $\langle\psi|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|\psi\rangle$. La valeur moyenne de "l'observable" est $\langle\psi|P_\alpha|\psi\rangle$.

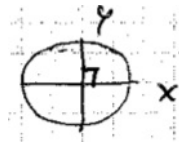
Si l'analyseur fait un angle β (avec x) et non pas α , l'appareil de mesure est différent. L'observable mesurée est alors aussi différente, notamment $P_\beta = |\beta\rangle\langle\beta| - |\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|$.

Il existe trois observables qui jouent un rôle privilégié et que nous rencontrerons plus tard souvent.

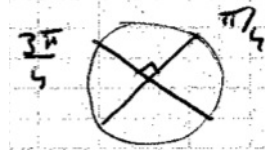
Si $\alpha = 0$, l'analyseur mesure la polarisation dans les directions x et y et

$$P_{\alpha=0} = |x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

On symbolise souvent cet analyseur ou cet "appareil de mesure" par



Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, l'analyseur mesure la polarisation dans les directions $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ et cet appareil de mesure est souvent symbolisé par
L'observable correspondant est:

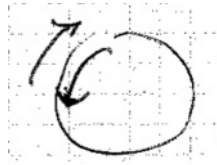


$$P_{\alpha=\frac{\pi}{4}} = \left| \frac{\pi}{4} \right\rangle \left\langle \frac{\pi}{4} \right| - \left| \frac{3\pi}{4} \right\rangle \left\langle \frac{3\pi}{4} \right| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Si on utilise un analyseur qui mesure la polarisation circulaire l'observable correspondante est:

$$P_{\text{circ}} = |R\rangle \langle R| - |L\rangle \langle L| = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Le symbole pour cet analyseur est



Il est instructif de vérifier cette identité en utilisant

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \langle R| = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i) \quad (2.48)$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \langle L| = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i) \quad (2.49)$$

Nous verrons dans les axiomes de la MQ qu'une quantité mesurable est toujours représentée par une matrice hermitienne. Les résultats d'une mesure de cette quantité sont les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice. Si λ_i et $|v_i\rangle$ sont valeur propre et vecteur propre de la matrice, la règle de Born stipule que

$$\text{Prob}(\text{observer } \lambda_i \text{ et } |v_i\rangle) = |\langle v_i | \psi \rangle|^2 \quad (2.50)$$

quand $|\psi\rangle$ est l'état initial avant la mesure.

2.5 Moments magnétiques classiques

Dans les quelques paragraphes qui suivent nous discutons un autre type de degré de liberté classique: le spin 1/2. Tout d'abord nous devons faire quelques rappels sur la notion de moment magnétique classique.

Considérons une boucle de courant plongée dans un champ magnétique uniforme (voir figure).

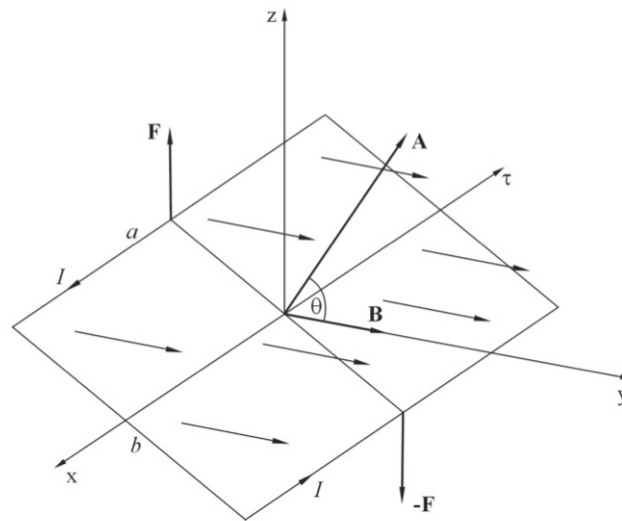


Figure 2.10: Boucle rectangulaire porteuse d'un courant électrique et plongée dans un champ magnétique uniforme

Si cette boucle est traversée par un courant la force de Laplace qui s'exerce sur les sections du fil aura tendance à ramener la boucle dans la position d'équilibre. Cette position d'équilibre correspond à la boucle de courant \perp à \vec{B} de façon à ce que les forces de Laplace s'équilibrent. L'origine microscopique de la force de Laplace est en fait la force de Lorentz. Pour une particule de charge q , de vitesse \vec{v} , dans un champ magnétique \vec{B} , la force de Lorentz qui s'exerce sur cette particule est (produit vectoriel ici): $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Si δq est la quantité de charge traversant une section du fil pendant un temps δt le terme la force s'exerçant sur une longueur $\delta \vec{l}$ du fil est $\delta \vec{F} = \delta q \frac{\delta \vec{l}}{\delta t} \times \vec{B} = I \delta \vec{l} \times \vec{B}$. Cette dernière expression est celle de la force de Laplace. On peut calculer le travail total de la force de Laplace s'exerçant sur la boucle de courant et en déduire que celle-ci possède une énergie potentielle dans le champ magnétique. La boucle est à l'équilibre lorsque cette énergie est minimale (cas où la boucle est \perp au champ). Un calcul (que nous

ométtons ici) montre que cette énergie potentielle est donnée par

$$E = -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad (2.51)$$

où \vec{M} est le *moment magnétique* associé à la boucle de courant $\vec{M} = I\vec{S}$, avec \vec{S} le vecteur unité perpendiculaire à la surface de longueur égale à la surface. On peut comprendre intuitivement cette formule en remarquant que (force de Laplace) \times (distance) possède les mêmes unités. Ce calcul montre aussi que l'on peut associer un moment magnétique à une charge q en rotation autour de la boucle de courant

$$\vec{M} = \frac{q}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{q}{2m}\vec{L} \quad (2.52)$$

où $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ est le moment cinétique. L'énergie est minimale lorsque le moment cinétique \vec{L} ou bien le moment magnétique \vec{M} pointent dans la direction du champ \vec{B} ; et est maximale lorsque \vec{L} ou \vec{M} pointent dans la direction opposée au champ.

Il existe aussi d'autres types de "moments magnétiques" dans la nature qui ne sont pas associés au mouvement de charges, mais sont "intrinsèques aux particules". Par exemple l'électron, le proton, le neutron (et par conséquent les noyaux atomiques) possèdent des moments magnétiques intrinsèques. Tout se passe comme si ces particules étaient des petites toupies en rotation sur elles memes ce qui produit des boucles de courant. Néanmoins cette image classique est trop naïve et n'est finalement pas très utile pour comprendre le formalisme nécessaire à la description des moments magnétiques intrinsèques. Nous allons voir que les formules $E = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ et $\vec{M} \sim \frac{q}{2m}\vec{L}$ sont toujours valables sauf que \vec{L} et \vec{M} sont des vecteurs dont les composantes sont des matrices! dans ce contexte le vecteur (à composantes matricielles) \vec{L} s'appelle le *spin* (et on utilise plutôt la notation \vec{S} à la place de \vec{L}).

2.6 L'expérience de Stern-Gerlach

L'expérience célèbre de Stern et Gerlach mis en évidence le "moment magnétique intrinsèque" de l'électron. A ce moment magnétique intrinsèque est associé un "moment cinétique intrinsèque" que l'on appelle le spin.

L'expérience consiste à préparer un faisceau d'atomes d'Argent qui sortent d'un four et à faire passer ce faisceau à travers un champ magnétique possédant un gradient dans la direction z .

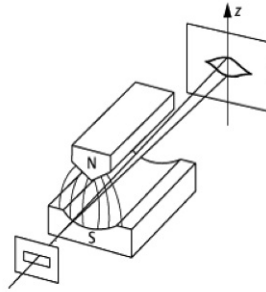


Figure 2.11: Expérience de Stern et Gerlach

Lorsque les particules passent à travers l'aimant le faisceau est séparé en deux et on observe deux taches séparées sur l'écran.

Ce résultat expérimental est étonnant à plusieurs titres. Tout d'abord l'atome d'Argent est neutre si bien que la force de Lorentz ne devrait pas affecter la trajectoire du faisceau. On peut très bien imaginer que, bien que neutres, les atomes d'Argent possèdent un moment magnétique \vec{M} non nul. Alors la force qui s'exerce entre eux vaut $\vec{\nabla}(\vec{M} \cdot B) = \vec{M} \cdot \vec{\nabla}B$ et on conçoit que le faisceau soit dévié. Mais on s'attendrait à ce que à la sortie du four \vec{M} soit "incohérent" et pointe dans des directions aléatoires. Puisque $\vec{M} \cdot \vec{\nabla}B = M_z(\vec{\nabla}B)_z$ et M_z est continu (prend des valeurs aléatoires) on s'attendrait à observer une tache plus ou moins uniforme étalée sur l'écran. Mais l'observation consiste en deux petites taches séparées (le long de l'axe z). *Cela indique qu'en fait M_z prend deux valeurs possibles.*

Cette *quantification du moment magnétique* ne peut pas être expliquée par la physique classique. Les électrons de l'atome d'Argent (et tous les électrons dans la nature) possèdent un moment magnétique intrinsèque qui n'a rien à voir avec leur mouvement orbital. Ce moment magnétique intrinsèque prend deux valeurs possibles. Pour les atomes d'Argent le nombre total d'électrons est impair et il se trouve que les moments magnétiques intrinsèques des électrons se compensent deux à deux sauf pour l'électron de la couche atomique externe de l'atome d'Argent. Cet électron sur la couche atomique externe confère à l'atome un moment magnétique quantifié prenant deux valeurs possibles.

Dans le paragraphe suivant nous discutons le moment magnétique intrinsèque et le spin de l'électron.

2.7 Spin $\frac{1}{2}$ et moments magnétiques quantiques

Les particules élémentaires possèdent un moment cinétique intrinsèque appelé "spin" et un moment magnétique intrinsèque associé. Le spin est une sorte d'analogie du moment cinétique \vec{L} . Néanmoins il serait trop naïf de considérer la particule (ici l'électron) comme une boule minuscule tournant sur elle-même. Rappelons nous que nous avons déjà abandonné la notion de trajectoire bien définie.

Le "vecteur" associé au spin est noté \vec{S} . De façon analogue à $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ il possède trois composantes (S_x, S_y, S_z) . L'unité de \vec{L} est "quantité de mouvement \times position" = "J.s" = unité de \hbar . Pour cette raison on posera

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (2.53)$$

où $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sont des composantes sans dimension. Comme nous allons le voir ces composantes sont chacune des matrices: en effet le spin (tout comme $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$) est une observable donc une matrice en MQ.

Le moment magnétique associé au spin est

$$\vec{M} = \gamma \vec{S} \quad (2.54)$$

tout comme $\vec{M} = \frac{q}{2m} \vec{L}$ pour une particule de charge q (et masse m). Ici γ est une constante qui dépend aussi de q et m ; pour une particule chargée telle que l'électron $\gamma = g \frac{q}{2m}$ avec $g \approx 2.002\dots$; pour le proton $g \approx 5$.

L'énergie associée à l'interaction entre le moment magnétique et le champ magnétique est comme dans le cas classique donnée par

$$-\vec{M} \cdot \vec{B} = -\gamma \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (2.55)$$

Comme pour toutes les observables en MQ, nous allons voir que cette quantité est une matrice (qui s'appelle l'Hamiltonien du spin dans le champ \vec{B}).

En bloquant un des deux faisceaux dans l'appareil de Stern-Gerlach on peut fabriquer un **filtre** qui est l'analogie des filtres polariseurs et/ou analyseurs. Ce filtre sélectionne un des deux états possibles pour les particules de "spin 1/2". On peut alors procéder à des expériences similaires à celles faites avec les photons.

Cela mène alors à la conclusion suivante. Pour des particules telles que l'électron, les matrices $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont des matrices 2×2 similaires aux observables de polarisation linéaires et circulaires:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Lors de l'expérience de Stern-Gerlach on mesure en fait la composante z du spin. Le résultat de la mesure donne deux valeurs possibles correspondant aux valeurs propres de $M_z = \gamma \frac{\hbar}{2} \sigma_z$. Ces deux valeurs propres sont égales à ± 1 multipliées par la constante $\gamma \frac{\hbar}{2}$. Les vecteurs propres correspondants sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\rangle \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle \quad (2.57)$$

et ce sont les deux états possibles obtenus lors de la mesure de σ_z . On peut vérifier qu'en notation de Dirac:

$$\sigma_z = (+1)|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (-1)|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \quad (2.58)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Si on tourne l'appareil le long de l'axe x , on mesure l'observable σ_x ou le moment magnétique $M_x = \gamma \frac{\hbar}{2} \sigma_x$. Les valeurs propres sont à nouveau ± 1 et les états propres correspondants sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \equiv |+\rangle \quad (2.60)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \equiv |-\rangle \quad (2.61)$$

En notation de Dirac

$$\sigma_x = (+1)|+\rangle\langle+| + (-1)|-\rangle\langle-| \quad (2.62)$$

De même on a pour σ_y les valeurs propres ± 1 avec les états propres

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \equiv |\circ\rangle \quad (2.63)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) \equiv |\ominus\rangle \quad (2.64)$$

et

$$\sigma_y = (+1)|\circ\rangle\langle\circ| + (-1)|\ominus\rangle\langle\ominus| \quad (2.65)$$

2.8 L'espace de Hilbert du spin $\frac{1}{2}$

Nous avons vu que les photons possèdent un degré de liberté de polarisation. Les états quantiques possibles de la polarisation du photon sont des vecteurs de l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; a \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$.

Un état général peut s'écrire en notation de Dirac $a|x\rangle + b|y\rangle$ où $|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|y\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus pour les photons une paramétrisation naturelle qui est analogue à la paramétrisation de la polarisation du champ électrique consiste à prendre $a = \cos \theta$ et $b = (\sin \theta)e^{i\phi}$. Ainsi les états de polarisation du photon sont en général

$$|\theta, \phi\rangle = \cos \theta |x\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |y\rangle \quad (2.66)$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Les particules de "spin 1/2" possèdent un degré de liberté interne analogue à la polarisation pour un photon. Des exemples de particules possédant un spin 1/2 sont l'électron, le proton, le neutron,... Les noyaux atomiques possèdent un spin total qui est la somme des spins des protons et neutrons. Souvent ceux-ci se compensent entre eux et si le nombre de protons et neutrons est impair le spin résultant du noyau classique est à nouveau de "type 1/2". Comme nous l'avons vu ce degré de liberté peut prendre essentiellement deux valeurs lors d'une mesure (par exemple avec un appareillage de Stern-Gerlach).

Ainsi l'espace des vecteurs d'état du spin 1/2 est à nouveau l'espace à deux dimensions $\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; a \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ et } |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$. Cette fois on préfère noter $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$.

La paramétrisation naturelle est presque la même que pour les photons. Un état général de spin est

$$|\theta, \phi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|\uparrow\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|\downarrow\rangle. \quad (2.67)$$

avec $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \phi \leq 2\pi$. La présence de $\frac{\theta}{2}$ au lieu de θ signifie entre autres que

$$|\theta = 0, \phi = 0\rangle = |\uparrow\rangle \quad \text{et} \quad |\theta = \pi, \phi = 0\rangle = |\downarrow\rangle. \quad (2.68)$$

Cette paramétrisation est naturelle car si on renverse le champ magnétique dans l'appareil de Stern-Gerlach on échange les deux taches sur l'écran. Renverser le champ magnétique revient à faire $\theta : 0 \rightarrow \pi$ et échanger les deux taches correspond à $|\uparrow\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle$.

Notez que pour les photons, tourner un polariseur d'un angle π ne change pas la direction de polarisation. De même pour les photons $|\theta = 0, \phi = 0\rangle = |x\rangle$ et $|\theta = \pi, \phi = 0\rangle = -|x\rangle$ qui est équivalent à $|x\rangle$ (à une phase $e^{i\pi}$ près).

2.9 Notion de Bit Quantique

Nous avons vu que "l'espace de Hilbert" à deux dimensions

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; a \text{ et } b \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.69)$$

muni du produit scalaire

$$(\bar{c} \quad \bar{d}) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \bar{c}a + \bar{d}b \quad (2.70)$$

intervient dans la description de deux systèmes physiques: la polarisation du photon et le spin 1/2 (de l'électron ou de certains noyaux atomiques).

Les degrés de libertés décrits par cet espace de Hilbert s'appelle aussi des systèmes à deux niveaux. La nature nous offre toute une variété de systèmes à deux niveaux décrits par l'espace des états \mathbb{C}^2 . Parfois \mathbb{C}^2 est une description exacte du système comme c'est le cas pour la polarisation du photon et le spin de l'électron (ou du proton, neutron, noyaux atomiques). Parfois c'est une description approximative qui consiste à retenir la partie importante des degrés de liberté plus compliqués. C'est le cas par exemple avec la molécule de Benzène C_6H_6 . Dans des conditions normales (température ambiante) la molécule de Benzène existe dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ de superposition des

deux états de base de la figure ci-dessous. C'est l'état stable d'énergie la plus basse. Quand la molécule absorbe de la lumière ultraviolette (photons) elle peut passer dans l'état excité d'énergie plus élevée $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$. Les états de base de la figure ne sont pas stable: on peut se faire l'image d'une molécule qui résonne ou oscille entre ces deux états.

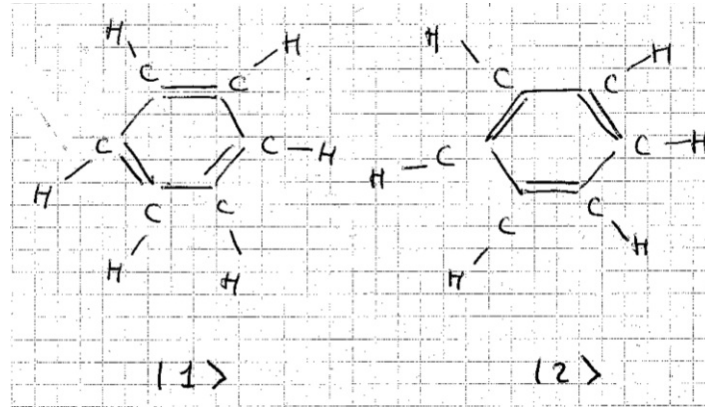


Figure 2.12: Molécule de Benzène. Les barres représentent les liaisons chimiques impliquant une paire d'électrons. Les doubles barres sont des doubles liaisons impliquant deux paires. L'état stable du Benzène est $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$.

On pourrait donner beaucoup d'autres exemples de systèmes à deux niveaux dans la nature, dans le domaine de la chimie, de la physique moléculaire ou atomique, de la physique nucléaire et des particules élémentaires.

Le bit quantique est simplement l'abstraction de la notion de système à deux niveaux du contexte physique détaillé. Un bit quantique est un état du type

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.71)$$

où $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

On adopte souvent (par convention) la convention relative au spin 1/2 c.à.d. $a = \cos \frac{\theta}{2}$ et $b = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}$ (mais pour la notion abstraite du bit quantique cela n'est pas obligatoire).

Le bit quantique est un degré de liberté qui possède une nature duale. Il est discret dans la mesure ou l'espace \mathbb{C}^2 possède la dimension 2 et les résultats de mesure sont binaires. Il est continu dans la mesure ou α et β sont des nombres complexes continus. Nous reviendrons sur ces considérations.

2.10 La sphère de Bloch

L'espace de Hilbert du bit quantique \mathbb{C}^2 , t.q. $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ est abstrait. La sphère de Bloch est une représentation géométrique très utile. Celle-ci est basée sur la paramétrisation

$$|\psi\rangle = |\theta, \phi\rangle = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \quad (2.72)$$

ou

$$|\psi\rangle = |\theta, \phi\rangle = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)|\uparrow\rangle + e^{i\phi} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)|\downarrow\rangle \quad (2.73)$$

On représente $|\theta, \phi\rangle$ par un vecteur unité sur une sphère où θ est l'angle par rapport à z et ϕ est l'angle par rapport à x dans le plan (x, y) . Ici θ et ϕ ne sont rien d'autres que les coordonnées sphériques.

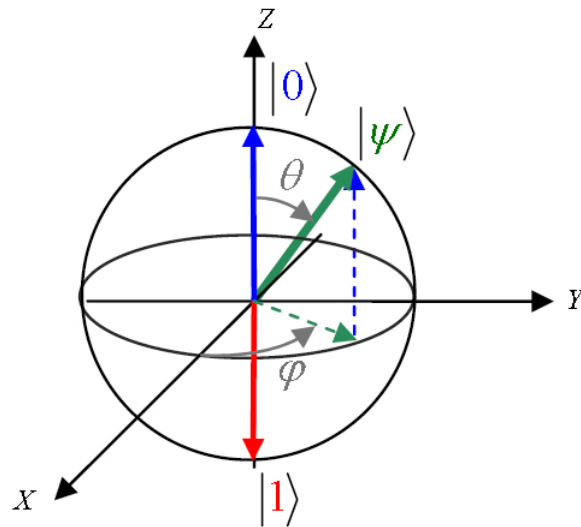


Figure 2.13: La sphère de Bloch

Les états des trois bases orthonormées ci-dessous

$$\{|\uparrow\rangle ; |\downarrow\rangle\} \quad \text{ou bien} \quad \{|0\rangle ; |1\rangle\} \quad (2.74)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = |+\rangle \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) = |-\rangle \right\} \quad (2.75)$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) = | \circ \rangle \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) = | \ominus \rangle \right\} \quad (2.76)$$

sont représentés sur la sphère de Bloch.

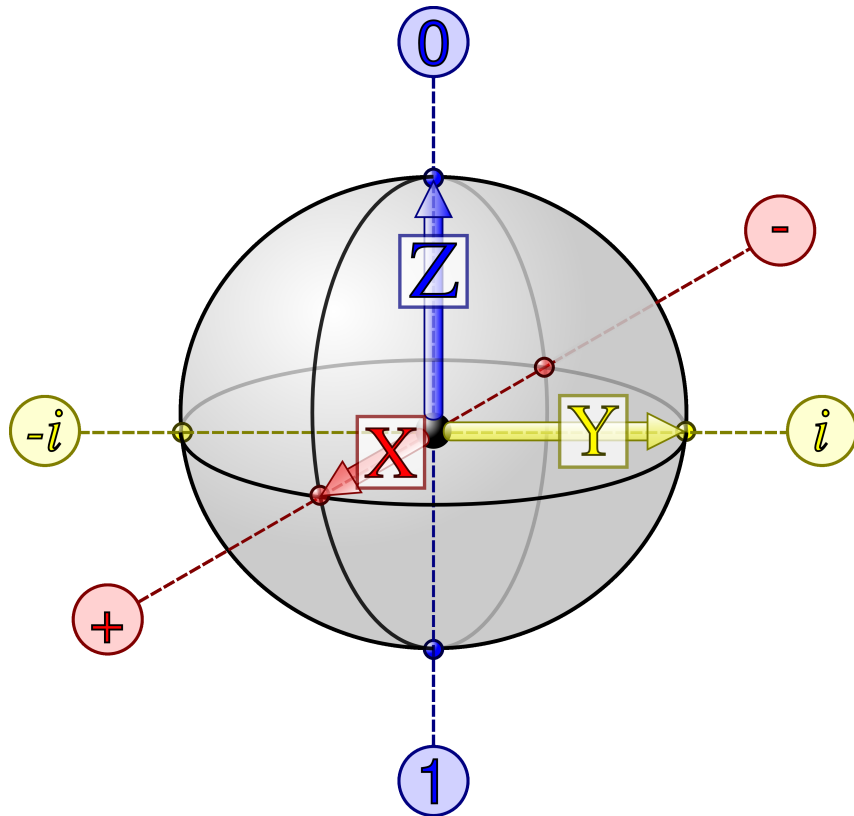


Figure 2.14: Représentation des trois états de bases orthonormées sur la sphère de Bloch, ici $|i\rangle = | \circ \rangle$ et $|-i\rangle = | \ominus \rangle$, $|0\rangle = |\uparrow\rangle$ et $|1\rangle = |\downarrow\rangle$

Ces trois bases s'appellent, pour des raisons évidentes les bases Z, X et Y en information quantique. Elles correspondent aux bases des états propres des trois matrices de Pauli du spin σ_z , σ_x et σ_y . Ces matrices sont aussi appelées souvent Z, X et Y.