

# Théorie Quantique de l'Information II

April 3, 2011

## Contents

# 1 Revue de la Mécanique Quantique

## 1.1 Histoire de la Mécanique Quantique

- **Fin 19ème/20ème siècle**

L'édifice "classique" de la physique est "complet" : Equations de Maxwell, Mécanique de Newton, Thermodynamique

- Mais surviennent des phénomènes inexplicables : raies spectrales, radioactivité, théorème du corps noir, effet photoélectrique, absence de l'éther....

- **Deux révolutions**

Relativité restreinte(1905) puis générale(1916)(L'utilisation des symétries en physique)

Mécanique quantique (non relativiste)

La relativité est l'oeuvre "d'un" homme (Einstein) mais la Mécanique Quantique est une oeuvre collective

### Débuts de la MQ

- **1900** : Planck , la thermodynamique du corps noir "Quantification de l'énergie"
- **1905** : Einstein introduit le photon (effet photoélectrique). Pousse l'idée de Planck jusqu'au bout
- **1910** : Bohr définit la structure de l'atome et introduit la quantification des orbites électroniques
- **1920** : De Broglie, idée de la fonction d'onde

### Vers la forme aboutie de la MQ

- **1925 → 1933** : Heisenberg, Schroedinger, Bohr, Dirac, Jordan développent la forme définitive de la MQ
- **1950** : Von Neumann développe le formalisme moderne que nous utiliserons

### Unification de la MQ et de la relativité

- **1940 → 1960** : Théorie des champs: dev de la physique des particules. Electrodynamisme Quantique.

### Dev moderne de la physique des particules

- **1960 → 1980** : Modèle standard. Théories de Jauge. Expériences au CERN

### Problèmes ouverts; Mystères modernes

- Boson de Higgs. Unification des forces
- Gravité Quantique
- Cosmologie; énergie noire

## 1.2 Histoire de l'information Quantique

- **1958** : Théoreme de l'information classique, principe de Shannon

L'information est traitée comme une entité mathématique indépendante du substrat physique

Bit classique (ou CBit) vaut 0 ou 1. C'est une variable binaire représentant la charge d'un conducteur, une différence de potentiel, l'aimantation d'un domaine magnétique. L'idéalisation binaire (ou digitale) est une bonne approximation dans la réalité. Le théoreme de l'information classique est un théoreme mathématique.

- **1960** : Landauer argumente que "Information is physical"

– A l'échelle atomique les degrés de liberté qui sont candidats a etre le "bit quantique" sont:

- \* La polarisation du photon
- \* Spin ou moment magnetique nucléaire
- \* Charge de cavité supraconductrice
- \* etc...

– On ne peut s'abstraire totalement des lois quantiques! Par ex :

- \* On ne peut pas copier un bit (no cloning)
- \* Lors d'une mesure le bit ne reste pas intact (postulat de la mesure)
- \* On peut former des "superpositions linéaires" de bits (parallélisme)
- \* On peut intriquer des bits (non localité)

Ces différences entre les bits quantiques(Qbit ou qubit) et Cbit sont intrinsèques aux lois de la nature. Elle ne sont pas d'ordre technologique. Elles sont indépendantes de nos modeles idéalisés.

- **Pionniers** : Landauer, Benioff, TOCOMPLETE, Bennett, Feynman ont insisté sur les points ci dessus (1960 → 1980)
- **Deutsch 1985** : définit un modèle d'ordinateur quantique (modèle des circuits)
- **Bennet-Brassard 1984** : distribution d'une clé secrete (la clé est classique) pour des communications quantiques.
- **Shor post 1990** : algorithme de factorisation d'entiers (polynomial!)
- **Grover post 1990**: algorithme de recherche dans une base de données.
- **Expériences** :
  - distribuer des clés est une réalité qui va au dela du laboratoire (Id Quantique, TOCOMPLETE)

- inégalité de Bell, ... , A. Aspect
- portes logiques : manipulation d'un Qbit, deux Qbits
- algorithme réalisé sur un petit nombre de qbits (RMN)
- Obstacle principal : "Décohérence" qui signifie qu'il est difficile de maintenir la "cohérence quantique" pour un grand nombre de degrés de liberté. Lié à la TOCOMPLETE(→ classique) quantique.

### 1.3 Revue des Postulats de la M.Q.

**Postulat 1.** L'état d'un système physique est décrit par un vecteur noté  $|\Psi\rangle$ , élément d'un espace d'Hilbert  $H$ . On normalise  $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$

Remarque :

espace d'Hilbert = espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , muni d'un produit scalaire.

Notation :

$$|\Psi\rangle \in H \& |\Phi\rangle \in H \text{ équivaut à } \hat{\Psi}, \hat{\Phi} \in H.$$

$$\text{"Vecteur } |\Phi\rangle \text{ transposé"} = \langle\Phi| \text{ équivaut à } \hat{\Phi}^t$$

$$\text{Produit scalaire } \langle\Phi|\Psi\rangle \text{ équivaut à } \hat{\Phi}^t \cdot \hat{\Psi}$$

Conséquences importante :

les superpositions sont des TOCOMPLETE  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

**Postulat 2.** Les "Observables" (ou encore quantités mesurables) sont données par des matrices hermitiennes. Si  $A$  est une matrice, on dit qu'elle est hermitienne quand  $A = A^\dagger$  ( $A^\dagger = \bar{A}^t$ )

Conséquence importante de ce postulat :

Problème aux valeurs propres  $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$  possède des solutions ( $A$  est TOCOMPLETE)  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_{n-1}$  réelles  
 $|v_0\rangle, |v_1\rangle \dots |v_{n-1}\rangle$  forment une base orthonormée de  $H$  c.a.d  $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$ . Aussi

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i| \text{ (Thm spectral)}$$

Preuve du Thm spectral: D'abord montrer que  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  et  $|v_i\rangle$  orth. (cf  $\star$ )  
ensuite :

$$A|v_i\rangle = \lambda_i |v_i\rangle$$

$$A|v_i\rangle \langle v_i| = \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|$$

$$A \sum_{i=0}^{n-1} |v_i\rangle \langle v_i| = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i |v_i\rangle \langle v_i|$$

Montrons maintenant que

$$\sum_{i=0}^{n-1} |v_i\rangle \langle v_i| = \mathbb{I}(\text{relation de fermeture})$$

En effet

$$\begin{aligned} & \langle v_l | \left( \sum_{i=0}^{n-1} |v_i\rangle\langle v_i| \right) |v_k\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle v_l |v_i\rangle\langle v_i |v_k\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{li}\delta_{ik} = \delta_{lk} = \langle v_l | \text{TOCOMPLETE} |v_k\rangle \end{aligned}$$

Note : Relation de fermeture

$$\forall \Psi : |\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} |v_i\rangle\langle v_i|\Psi\rangle \Rightarrow (|v_i\rangle \text{ est une base})$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } \star : A|v\rangle = \lambda|v\rangle &\Rightarrow \langle v|A|v\rangle = \lambda\langle v|v\rangle \\ \text{puisque } \langle v|A|V\rangle \in \mathbb{R} \text{ on a } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

puisque  $\langle v|A|V\rangle \in \mathbb{R}$  on a  $\lambda \in \mathbb{R}$

Si  $\lambda_i \neq \lambda_j$  on a

$$\langle \lambda_j | A | \lambda_i \rangle = \lambda_i \langle v_j | v_i \rangle = \lambda_j \langle v_j | v_i \rangle$$

$\langle v_j | v_i \rangle = 0$  si  $\lambda_j \neq \lambda_i$ . Si  $\lambda$  est dégénérée, on choisit une base orth dans le sous espace

**3.** Le générateur de la dynamique est donné par une matrice hermitienne appelée H (Hamiltonien) donc l'interprétation physique correspond à l'énergie et on a e:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle \text{ Equation de Schrödinger}$$

Conséquence.

H indépendant du temps :

$$|\Psi\rangle_t = \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) |\Psi\rangle_0$$

avec  $\exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) = U(t, 0)$  opérateur unitaire qui transporte l'état du temps 0 au temps t. Unitaire signifie :

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$$

ici :

$$\exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right) = \exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) = \mathbb{I}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\Psi\rangle_t &= \frac{d}{dt} \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) |\Psi\rangle_0 \\ &= \frac{i}{\hbar} H \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) |\Psi\rangle_0 \\ &= \frac{i}{\hbar} H |\Psi\rangle_t \\ \Rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dt} |\Psi\rangle_t &= H |\Psi\rangle_t\end{aligned}$$

Autre description de la dynamique : représentation d'Heisenberg. Au lieu de décrire la dynamique par l'évolution d'états, on peut la décrire par l'évolution des observables.

En effet, soit

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle_t &= \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) |\Psi\rangle_0 \\ |\Phi\rangle_t &= \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) |\Phi\rangle_0\end{aligned}$$

$$\langle \Phi | A | \Psi \rangle_t = \langle \Phi | \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) A \exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right) | \Psi \rangle_0$$

et on peut définir l'observable  $A(t)$  au temps  $t$ :

$$A(t) = \exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right) A \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) = U^\dagger(t, 0) A U(t, 0)$$

avec  $\langle \Phi_t | A | \Psi_t \rangle = \langle \Phi_0 | A | \Psi_0 \rangle$

Equation de Heisenberg:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{i}{\hbar} [H, A(t)]$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} A(t) &= -\frac{i}{\hbar} \exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right) H A \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) + \frac{i}{\hbar} \exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right) A H \exp\left(\frac{itH}{\hbar}\right) \\ &= \frac{i}{\hbar} (A(t) H - H A(t)) \\ &= \frac{i}{\hbar} [A(t), H]\end{aligned}$$

Noter que  $\frac{d}{dt} H = \frac{i}{\hbar} [H, H] = 0 \Rightarrow H = H(t)$  L'énergie est quantité conservée.

Analogie avec la Mécanique classique

Soit

$A(t) = q(t) =$  position au temps  $t$

$A(t) = p(t) = \text{impulsion au temps } t$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q(t) &= \frac{i}{\hbar}[H, q(t)] \\ \frac{d}{dt}p(t) &= \frac{i}{\hbar}[H, p(t)]\end{aligned}$$

Les equations du Hamiltonien classique sont :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q(t) &= \frac{\delta}{\delta p}H(q(t), p(t)) \\ \frac{d}{dt}p(t) &= -\frac{\delta}{\delta q}H(q(t), p(t))\end{aligned}$$

Ainsi on voit que:

$$\begin{aligned}\frac{i}{\hbar}[H, q(t)] &\leftrightarrow \frac{\delta}{\delta p}H \\ \frac{i}{\hbar}[H, p(t)] &\leftrightarrow -\frac{\delta}{\delta q}H\end{aligned}$$

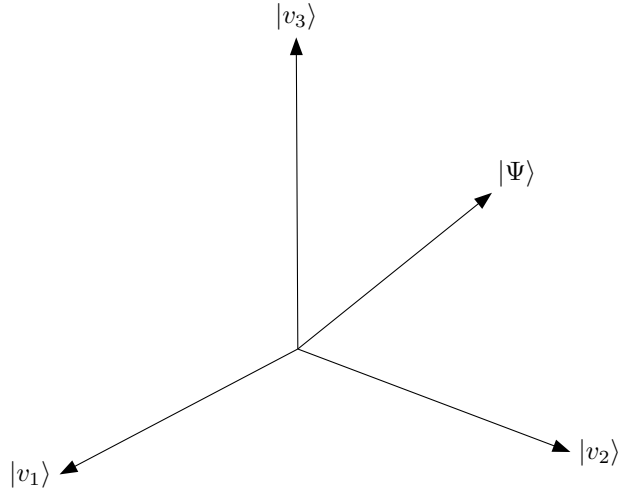
C'est une expression du "principe de correspondance" :

$$\frac{i}{\hbar}[A, B] \leftrightarrow \frac{\delta A}{\delta q} \frac{\delta B}{\delta p} - \frac{\delta A}{\delta p} \frac{\delta B}{\delta q} \text{ pour } \hbar \rightarrow 0$$

#### **Postulat 4.**

- **1ère forme** : Soit un système dans l'état  $|\Psi\rangle$  avant la mesure. Si on mesure l'observable A (la quantité A) alors le resultat de la mesure (est un nombre)  $\lambda_i$  qui est une valeur propre de A. La probabilité d'obtenir cette valeur propre est  $\|\langle v_i|\Psi\rangle\|^2$  et l'état apres la mesure est  $|v_i\rangle$ .
- **2eme forme** : En informatique quantique souvent on ne specifie pas l'observable mesurée mais on spécifie une base de mesure  $\{|v_0\rangle, |v_1\rangle, \dots, |v_{n-1}\rangle\}$  qui modélise l'appareil de mesure. Si l'état est  $|\Psi\rangle$  avant la mesure, apres la mesure on obtient  $|v_i\rangle$  avec probabilité  $\|\langle v_i|\Psi\rangle\|^2$ .





**Figure 1.** Etat  $|\Psi\rangle$  dans la base  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$

La mesure est une projection aléatoire sur une base  $i$ . Jeux de dés. Il y a un résultat de mesure (Einstein pensait que Dieu ne joue pas aux dés)(Débat Bohr-Einstein célèbre).

Note:  $p(i) = \|\langle v_i|\Psi\rangle\|^2$  est bien une distribution de probabilité. En effet

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} p(i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle v_i|\Psi\rangle \overline{\langle v_i|\Psi\rangle} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \langle \Psi|v_i\rangle \langle v_i|\Psi\rangle \\
 &= \langle \Psi| \left( \sum_{i=0}^{n-1} |v_i\rangle \langle v_i| \right) |\Psi\rangle \\
 &= \langle \Psi|\Psi\rangle \\
 &= \mathbb{I}
 \end{aligned}$$

Notez aussi :

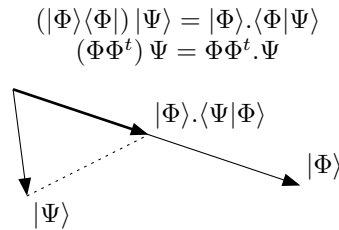
$$\begin{aligned}
 p(i) &= \langle \Psi|v_i\rangle \langle v_i|\Psi\rangle \\
 |v_i\rangle \langle v_i| &= P_i = \text{projecteur sur vecteur } |v_i\rangle \text{ et } (v_i v_i^t) \text{ matrice de projection} \\
 p(i) &= \langle \Psi|P_i|\Psi\rangle \\
 |v_i\rangle &= \frac{P_i|\Psi\rangle}{\|P_i|\Psi\rangle\|}
 \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 \|P_i|\Psi\rangle\| &= \sqrt{\langle \Psi|P_i^2|\Psi\rangle} = \sqrt{\langle \Psi|P_i|\Psi\rangle} = \|\langle \Psi|v_i\rangle\| \\
 \Rightarrow \frac{P_i|\Psi\rangle}{\|P_i|\Psi\rangle\|} &= \frac{|v_i\rangle \langle v_i|\Psi\rangle}{\|\langle \Psi|v_i\rangle\|} \approx |v_i\rangle
 \end{aligned}$$

La phase n'est pas importante

Pourquoi est ce que  $|\Phi\rangle\langle\Phi|$  est un proj sur  $|\Phi\rangle\forall|\Phi\rangle?$



**Figure 2 :** Projection de  $\Psi$  sur  $\Phi$ . La longueur est  $\langle\Psi|\Phi\rangle$

**Postulat 5.** Soit deux systèmes indépendants décrits par deux espaces de Hilbert  $H_1$  et  $H_2$  (ce peut être deux particules identiques et deux copies du même espace de Hilbert). le système composé (quand les deux particules forment "le" système) est décrit par des vecteurs d'états dans  $H_1 \otimes H_2$

Rappel : Notion de produit tensoriel.

- soit  $H_1$  avec base  $|v_i\rangle; i = 1 \dots N_1 (\forall |\Psi\rangle : |\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} c_i |v_i\rangle)$
- soit  $H_2$  avec base  $|w_j\rangle; j = 1 \dots N_2 (\forall |\Psi\rangle : |\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{N_2} d_j |w_j\rangle)$
- L'espace  $H_1 \otimes H_2$  est défini par l'espace possédant la base  $|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$  de dimension  $N_1 N_2$ 

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{N_1 N_2} c_{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle$$
autres notations  $|v_i, w_j\rangle, |v_i\rangle|w_j\rangle$

Etats produits de  $H_1 \otimes H_2$  :

$$|\Psi\rangle \text{ t.q. } \exists |\Phi_1\rangle \text{ et } |\Phi_2\rangle \text{ t.q. } |\Psi\rangle = |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle$$

Etats intriqués

$$|\Psi\rangle \text{ t.q. } \nexists |\Phi_1\rangle \text{ et } |\Phi_2\rangle \text{ t.q. } |\Psi\rangle = |\Phi_1\rangle \otimes |\Phi_2\rangle$$

## 1.4 Le photon

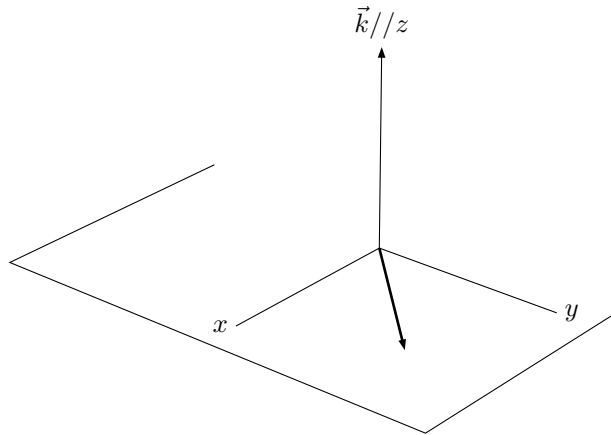
Le premier système élémentaire que nous allons étudier est le photon. Celui-ci est la particule associée aux quantités d'énergie du champ électromagnétique (lumière).

Degrés de liberté :

- spatials (translation)(impulsion  $\hat{k}$ )
- polarisation (direction de vibration de  $\mathbf{E}$  dans le plan transverse)

Classiquement l'onde plane electromagnetique :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \text{Re} \vec{E}_0 e^{i(k \cdot z - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \omega &= ck \\ \text{vecteur d'onde } \vec{k} &= (0, 0, k) \\ \vec{E}_0 &= E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\delta x} \\ \sin\theta e^{i\delta y} \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$



**Figure 3 :** L'onde plane electromagnetique  
(Energie par unité de TOCOMPLETE/par unité de surface)

$$\vec{S} = e_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

et l'intensité :

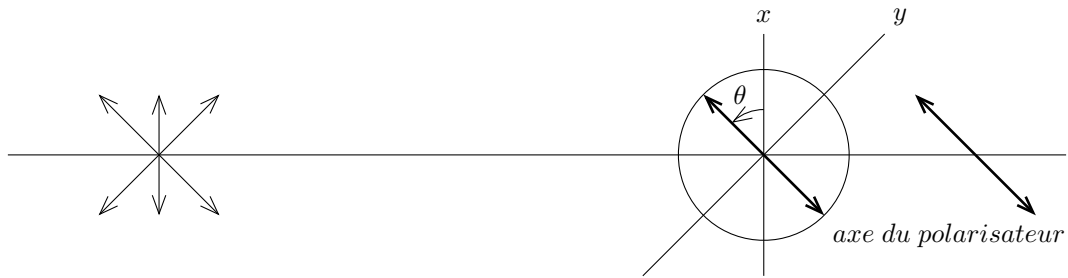
$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{S}|, dt; T = \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{2} e_0 c |\vec{E}_0|^2\end{aligned}$$

$\delta_x - \delta_y = \omega\pi$  ( $\omega$  entier) polarisation lineaire si  $\omega$  est pair/impair, l'angle est  $\theta/\theta_\perp$

$\delta_x - \delta_y = \omega\frac{\pi}{2}$  pair/impair polarisation circulaire gauche/droite

En général, la polarisation est elliptique

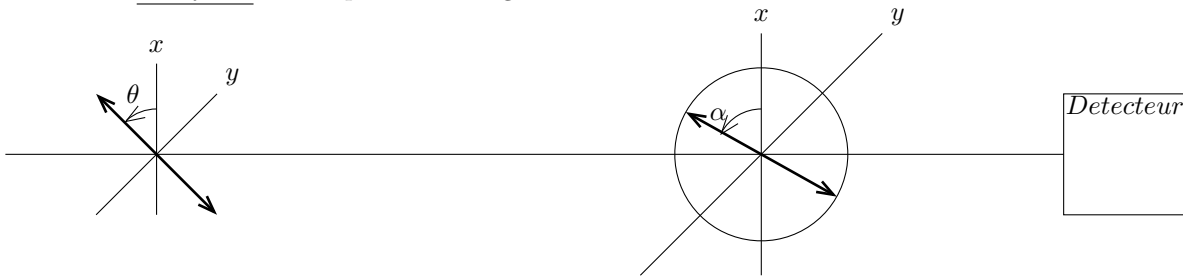
Polariseur : filtre qui prepare l'onde dans un etat polarisé donné.



**Figure 4 :** Polariseur

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{Re}e^{i(tz - \omega t)}$$

Analyseur : filtre placé a un angle  $\alpha$ .



**Figure 5 :** Analyseur

$$\vec{E}_{in} \approx \vec{E}_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \text{Re}e^{i(tz - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{out} &= (\vec{E}_{in} \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\alpha} \\ &= E_0 \cos(\theta - \alpha) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(tz - \omega t)} \end{aligned}$$

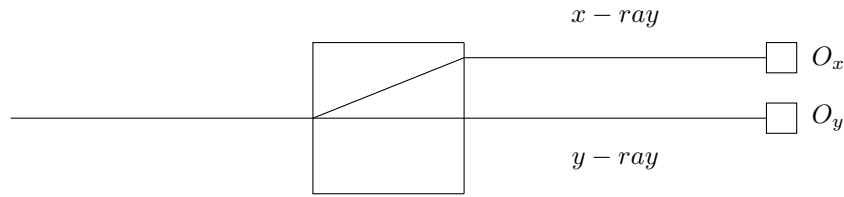
$$\frac{I_{out}}{I_{in}} = \cos^2(\theta - \alpha)$$

En particulier:

$\alpha - \theta = 0$  ou  $\pi$  toute la lumiere passe

$\alpha - \theta = \pm \frac{\pi}{2}$  rien ne passe

Lame birefringente ou Beam splitter



**Figure 6 : Beam Splitter**

$$E_x = E_0 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(tz - \omega t)}$$

$$E_y = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(tz - \omega t)}$$

$$\frac{I_{out,x}}{I_{in}} = \cos^2 \theta ; \quad \frac{I_{out,y}}{I_{in}} = \sin^2 \theta$$

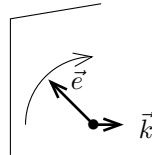
Photons  
particules

- d'impulsion  $\hbar \vec{k}$  (quantité de mouvement)
- d'énergie  $\hbar \omega = c |\vec{k}|$
- Intensité  $\hbar \omega c \frac{N}{V}$ ;  $\frac{N}{V} = \#$  de photons par unite de volume

Etat du photon: (postulat 1)

Espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$  avec  $L$  degré de liberté de translation et  $\mathbb{C}$  degrés de liberté de polarisation

Vecteur d'état  $|\vec{K}\rangle \otimes |\vec{e}\rangle$   $\vec{K} \in \mathbb{R}^3$  et  $\vec{e} \in \mathbb{C}^2$



L'état general est une superposition:

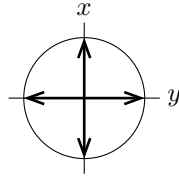
$$|\Psi\rangle = \sum_{\vec{k}, \vec{e}} f(\vec{k}, \vec{e}) |\vec{K}\rangle \otimes |\vec{e}\rangle$$

Fonction d'onde orbitale  $f(\vec{K})$

TOCOMPLETE duale  $\int f(\vec{K}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \tilde{f}(\vec{x})$

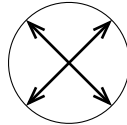
- Base de polarisation lineaire : (base Z)

$$|e\rangle = \lambda|\uparrow\rangle + \mu|\leftrightarrow\rangle$$



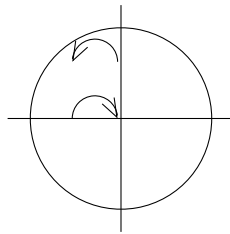
- Base de polarisation lineaire: (base X)

$$|e\rangle = \lambda|\nearrow\rangle + \mu|\nwarrow\rangle$$



- Base de polarisation circulaire: (base Y)

$$|e\rangle = \lambda|\curvearrowright\rangle + \mu|\curvearrowleft\rangle$$



On a :

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & |\leftrightarrow\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\nearrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\leftrightarrow\rangle) \\ |\nwarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\leftrightarrow\rangle) \\ |\curvearrowright\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} & &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\leftrightarrow\rangle) \\ |\curvearrowleft\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} & &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\leftrightarrow\rangle) \end{aligned}$$

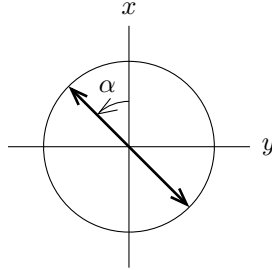
Etat general de polarisation lineaire

$$|\alpha\rangle = \cos \alpha |\uparrow\rangle + \sin \alpha |\leftrightarrow\rangle$$

Etat general de polarisation elliptique

$$|\theta, \Psi\rangle = \cos \theta |\uparrow\rangle + \sin \theta e^{i\Phi} |\leftrightarrow\rangle$$

Observable polarisation



**Figure 7 :** Appareil de mesure = analyseur d'angle  $\alpha$   
Grace a cet appareil on mesure

$$P_\alpha = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$$

écrivons la matrice dans la base  $Z$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \cos \alpha |\uparrow\rangle + \sin \alpha |\leftrightarrow\rangle \\ \langle\alpha| &= \cos \alpha \langle\uparrow| + \sin \alpha \langle\leftrightarrow| \\ |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \cos^2 \alpha |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \cos \alpha \sin \alpha |\uparrow\rangle\langle\leftrightarrow| + \sin \alpha \cos \alpha |\leftrightarrow\rangle\langle\uparrow| + \sin^2 \alpha |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| \\ |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| &= \sin^2 \alpha |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - \sin \alpha \cos \alpha |\uparrow\rangle\langle\leftrightarrow| - \cos \alpha \sin \alpha |\leftrightarrow\rangle\langle\uparrow| \\ &\quad + \cos^2 \alpha |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\alpha &= \cos \frac{\alpha}{2} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sin \frac{\alpha}{2} |\uparrow\rangle\langle\leftrightarrow| - \cos \frac{\alpha}{2} |\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + \sin \frac{\alpha}{2} |\leftrightarrow\rangle\langle\uparrow| \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} & -\cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \text{ dans la base } Z \end{aligned}$$

v.p.  $P_\alpha |\Psi\rangle = \lambda |\Psi\rangle$  avec  $|\Psi\rangle =$

- $|\alpha\rangle$  v.p. +1
- $|\alpha_\perp\rangle$  v.p. -1

Postulat de la mesure Soit  $|\Psi\rangle$  état initial.

Après la polarisation, l'état est

- $|\alpha\rangle$  avec prob  $|\langle\alpha|\Psi\rangle|^2$
- $|\alpha_\perp\rangle$  avec prob  $|\langle\alpha_\perp|\Psi\rangle|^2$

Exemple :  $|\Psi\rangle = |\theta\rangle$

$$|\langle\alpha|\Psi\rangle|^2 = \cos^2(\alpha - \theta)$$

$$|\langle\alpha_\perp|\Psi\rangle|^2 = \sin^2(\alpha - \theta)$$

*TOCOMPLETE*

Relation d'incertitude

$$\begin{aligned}
A &= \sum \lambda_i P_i \\
\text{prob}(i) &= \langle \Psi | P_i | \Psi \rangle \\
E_i &= \sum_i \lambda_i \text{prob}(i) = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \\
\text{Var}(i) &= \langle \Psi | A^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | A | \Psi \rangle^2 \\
[P_\alpha, P_\beta] &= P_\alpha P_\beta - P_\beta P_\alpha \\
\Delta P_\alpha \Delta P_\beta &\geq \frac{1}{2} [P_\alpha, P_\beta] | \Psi \rangle
\end{aligned}$$

### Evolution Temporelle

$$\begin{aligned}
&\text{Photon } R, \omega \text{ avec } \omega = c|\vec{K}| \\
H &= \hbar\omega |\vec{K}, \vec{e}\rangle \langle \vec{K}, \vec{e}|
\end{aligned}$$

Equation de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle = \hbar\omega |\vec{K}, \vec{e}\rangle \langle \vec{K}, \vec{e}| \Psi_t\rangle$$

$|\Psi\rangle(t=0) = e^{i\Phi} |\vec{K}, \vec{e}\rangle$  avec  $e^{i\Phi}$  une phase initiale arbitraire

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \vec{K}, \vec{e} | \Psi_t \rangle = \hbar\omega \langle \vec{K}, \vec{e} | \Psi_t \rangle \text{ avec } \langle \vec{K}, \vec{e} | \Psi_0 \rangle = e^{i\Phi}$$

$$\Rightarrow \langle \vec{K}, \vec{e} | \Psi_t \rangle = e^{i\Phi} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle = e^{i(\Phi+\omega t)} |\vec{K}, \vec{e}\rangle \text{ avec } e^{i(\Phi+\omega t)} \text{ evolution temporelle de la phase}$$

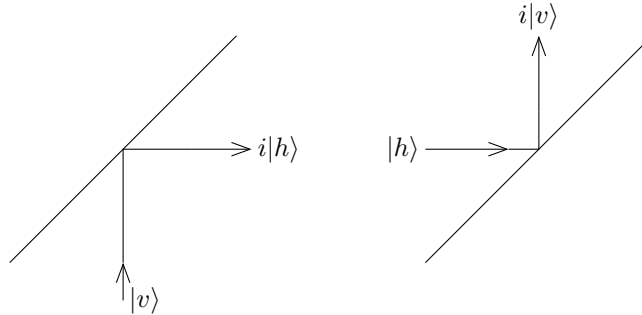
Note: Evolution temporelle de l'état de polarisation

$$|e\rangle = e^{i\omega t} \cos\theta |\uparrow\rangle + e^{i\omega t} \sin\theta e^{i\Phi t} |\leftrightarrow\rangle$$

Ellipse dans le plan:

Eccentricité de l'ellipse reliée a  $\theta$  et direction de l'axe relié a  $\Phi$

Manipulation élémentaire de l'état du photon



**Figure 8 :** Miroir

L'état orbital (noté  $|K\rangle$  avant) est ici modelisé par un espace d'Hilbert  $\mathbb{C}^2 = \{|v\rangle, |h\rangle\}$

Le miroir effectue les transitions

$$\begin{aligned}
|v\rangle &\rightarrow i|h\rangle \\
|h\rangle &\rightarrow i|v\rangle
\end{aligned}$$



qui modelisent les reflections.

La matrice unitaire correspondant est :

$$U_{reflection} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } |v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |h\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

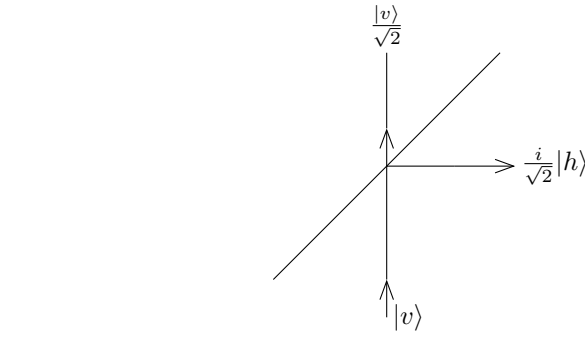
Notons que

$$U_{reflection} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = iX = iNOT$$

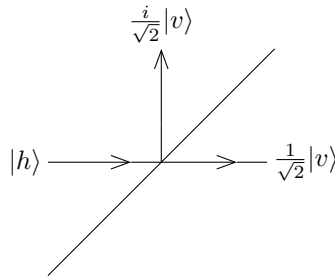
Ainsi la porte NOT peut etre realisee par un miroir sur l'etat orbital des photons.

Note:  $U_{reflection}$  est bien unitaire

### Miroir semi-transparent ou Beam-splitter



transition :  $|v\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|v\rangle + i|h\rangle)$



transition :  $|h\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle + i|v\rangle)$

Remarque: Le faisceau est decompose en deux faisceaux d'intensité moitié cha-

cun. La matrice unitaire de la base  $|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $|h\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est

$$U_{beam splitter} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

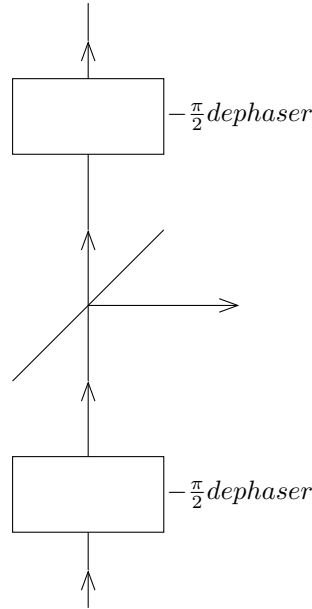
On verifie qu'elle est unitaire :  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$

A des dephasages res cette matrice n'est autre que celle de Hadamard. En effet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = H$$

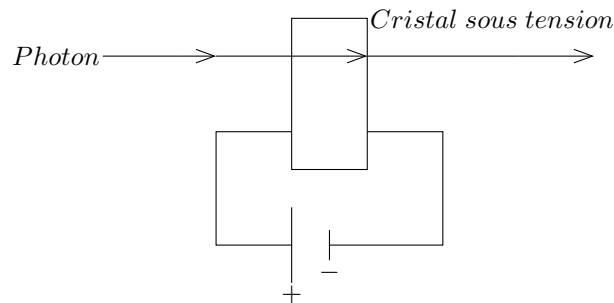
Ou :  $H|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle + |h\rangle)$  et  $H|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle - |h\rangle)$

Ainsi on peut réaliser la porte d'Hadamard optiquement avec le système suivant :



### Cellules de Pokcel

Celles ci permettent de manipuler le degré de liberté de la polarisation



L'indice de refraction depend de la polarisation  $|x\rangle$  ou  $|y\rangle$  du photon. En effet le champs electricque appliqué au cristal change la constant diélectrisante et l'indice de refraction.

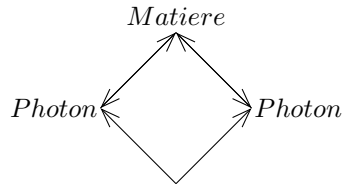
Déphasage du photon qui passe à travers le cristal :

$$e^{i\frac{c}{\mu_x} \frac{2\pi}{\lambda} t} |x\rangle \text{ et } e^{i\frac{c}{\mu_y} \frac{2\pi}{\lambda} t} |y\rangle$$

On réalise ainsi des portes à un qbit sur le degré de liberté de la polarisation.

Interaction par effet Ken(optique non linéaire)

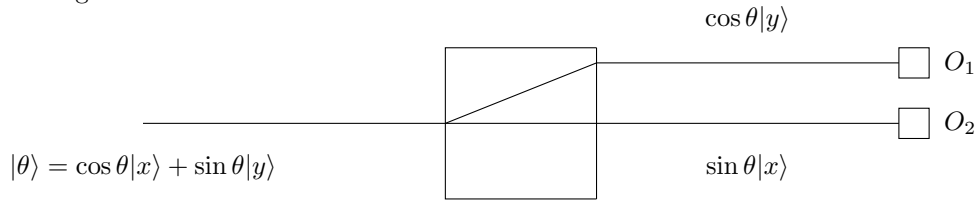
L'interaction directe photon-photon n'existe pas. Par contre on peut creer des interaction indirectes :



Ainsi on peut realiser des portes 2qbits(de type CNOT).

Lame Biréfringente

Un autre outil important dans les manipulations quantiques est la lame birefringente.



**Figure 6 :** Beam Splitter

Le faisceau est refracté differement selon la polarisation (parfois on voit deux images a travers une vitre "double"). Si on envoie un photon a travers la lame , la probabilité de détection en  $D_1$  est  $(\cos \theta)^2$  et en  $D_2$  celle ci vaut  $(\sin \theta)^2$ . Notons enore qu'ici on a affaire à un état intriqué d'impulsion et de polarisation:

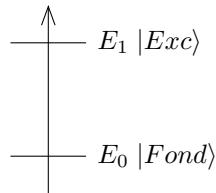
$$|\theta, 1\rangle \rightarrow \cos \theta|y, 1\rangle + \sin \theta|x, 2\rangle$$

## 1.5 Systèmes a deux niveaux et leur dynamique

En mécanique quantique, un systeme a deux niveaux est un systeme qui peut etre modelisé par un espace de Hilbert  $\mathbb{C}^2$ , posédant la base canonique  $|0\rangle, |1\rangle$  et d'Hamiltonien  $H =$  matrice  $2 \times 2$ . Les niveaux d'energie propres sont

$$H|Fond\rangle = E_0|Fond\rangle \text{ Etat fondamental} = |Fond\rangle$$

$$H|Exc\rangle = E_1|Exc\rangle \text{ Etat excité} = |Exc\rangle$$



Il est conventionnel de mesurer l'énergie par une fréquence : c,a,d que l'on pose  $E_0 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$  et  $E_1 = +\frac{\hbar\omega_0}{2}$  si bien que l'énergie d'excitation est  $E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$ .

L'exemple canonique de réalisation physique du système à deux niveaux et le spin  $\frac{1}{2}$  dans un champ magnétique extérieur. Mais il existe d'autres systèmes physiques qui peuvent être relativement bien modélisés par des systèmes à deux niveaux.

Les systèmes à deux niveaux sont la réalisation physique du qubit. C'est parce que la nature nous offre (on peut en fabriquer dans les laboratoires) des systèmes à deux niveaux que l'on peut prendre le qubit comme unité élémentaire en informatique quantique.

Le spin Les atomes, les noyaux, les particules élémentaires possèdent un moment magnétique. Celui-ci est analogue à l'aiguille d'une boussole ou à un dipôle magnétique Nord-Sud. Le moment magnétique est décrit par un vecteur  $\vec{M}$  qui a tendance à s'aligner avec le champ magnétique  $\vec{B}$ . L'énergie d'interaction correspondante est :

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B}$$

(qui est minimisé ici si  $\vec{M} // \vec{B}$  donc quand la boussole indique la direction Nord-Sud). Classiquement on peut se représenter  $\vec{M}$  comme provenant de boucles de courant élémentaires créant un champ magnétique induit (Loi d'Ampère, ou Bio-Savart). Pour les atomes ces boucles de courant proviennent effectivement de la trajectoire du TOCOMPLÈTE autour du noyau et on parle de moment magnétique orbital. Pour les noyaux, les particules élémentaires il existe un moment magnétique dit intrinsèque provenant de la rotation intrinsèque de la particule sur elle-même. Bien sûr, cette dernière image est classique et la version quantique de la rotation intrinsèque est décrite par un opérateur  $\vec{S}$ , spin, analogue au vecteur rotation classique.

On pose  $\vec{M} = g\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$  ou  $\sigma$  est une matrice  $(2S+1) \times (2S+1)$  avec  $S$  entier ou demi-entier. Pour  $S=0$  il n'y a pas de moment magnétique. Pour  $S = \frac{1}{2}$  (spin  $\frac{1}{2}$ )  $\sigma$  est  $2 \times 2$ . Pour  $S=1$  (spin 1)  $\sigma$  est  $3 \times 3$ . Ici nous nous intéressons au cas  $2 \times 2$  qui réalise le qubit.

Spin  $\frac{1}{2}$

$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  Le vecteur de matrice de Pauli avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui satisfont les relations (voir exercices).

## L'Hamiltonien

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{g\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \\
 &= -\frac{g\hbar}{2} (\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z) \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{g\hbar}{2} B_z & -\frac{g\hbar}{2} (B_x + iB_y) \\ -\frac{g\hbar}{2} (B_x - iB_y) & \frac{g\hbar}{2} B_z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Les v.p. sont  $E_0 = -\frac{\hbar\omega_0}{2} = -\frac{g\hbar}{2} B$  et  $E_1 = \frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{g\hbar}{2} B$  ou  $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ .  
 $\omega_0 = gB = \text{frequence de Larmor}$

## Etats propres

$|up\rangle$  dans la meme direction que  $|\vec{B}\rangle$  d'energie  $-\frac{\hbar\omega_0}{2} = -\frac{g\hbar}{2} B$

$|down\rangle$  dans la meme direction que  $|\vec{B}\rangle$  d'energie  $\frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{g\hbar}{2} B$

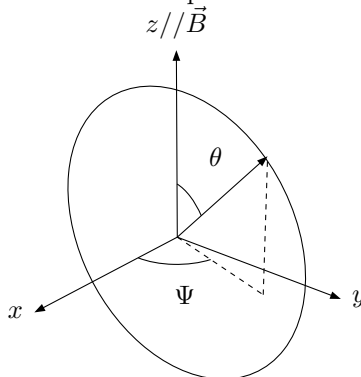
## Paramétrisation de Bloch du vecteur d'état

$|\Psi\rangle \in \mathbb{C}^2$   $|\Psi\rangle = \lambda |\uparrow\rangle + \mu |\downarrow\rangle$  avec  $\lambda, \mu$  4 parametres réels.

$|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1 \Rightarrow 3 \text{ params}$

La phase globale peut etre eliminee  $\Rightarrow 2$ params réels

On choisit deux angles  $\theta$  et  $\Phi$  sur une sphere



$$|\Psi\rangle = (\cos \frac{\theta}{2}) e^{i\frac{\Phi}{2}} |\uparrow\rangle + (\sin \frac{\theta}{2}) e^{-i\frac{\Phi}{2}} |\downarrow\rangle$$

$\theta = 0 \& \pi \Leftrightarrow |\uparrow\rangle \text{ et } |\downarrow\rangle$  Le long de z

$\theta = \frac{\pi}{2} \& \Phi \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\frac{\Phi}{2}} |\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\Phi}{2}} |\downarrow\rangle)$

$\Phi = 0 \& \pi \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$  le long de x

$\Phi = \frac{\pi}{2} \& \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i |\downarrow\rangle)$  le long de y

Dynamique dans un champs constant

soit  $\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$  dans la direction z.

$$H_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & +\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z = -\frac{\hbar\omega_0}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$$

Equ de Schrödinger  $i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = H_0|\Psi(t)\rangle$

solution :  $|\Psi(t)\rangle = U_0(t, 0)|\Psi(0)\rangle$

avec  $i\hbar\frac{d}{dt}U_0(t, 0) = H_0U_0(t, 0)$

$$\Rightarrow U_0(t, 0) = e^{-\frac{itH}{\hbar}} = \begin{pmatrix} e^{it\frac{\omega_0}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-it\frac{\omega_0}{2}} \end{pmatrix}$$

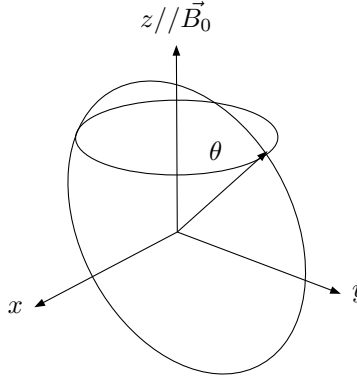
Prenons

$$|\Psi(0)\rangle = (\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\Phi}{2}}|\uparrow\rangle + (\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\Phi}{2}}|\downarrow\rangle)$$

Alors

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= (\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\Phi+\omega_0 t}{2}}|\uparrow\rangle + (\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\Phi+\omega_0 t}{2}}|\downarrow\rangle) \\ &= e^{i\frac{\Phi+\omega_0 t}{2}} \left( \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\Phi+\omega_0 t}|\downarrow\rangle \right) \end{aligned}$$

Ainsi  $\theta$  reste constant au cours du temps et  $\Phi$  precesse autour de z avec la frequence  $\omega_0$  (Freq de Larmor) ou la periode  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  (Attention periode de la phase relative!)



Ajout des champs tournant On ajoute  $\vec{B}_1 = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, 0)$  d'intensité  $B_1$  et tournant a la frequence  $\omega$  autour de z.

$$\begin{aligned} H_{tot}(t) &= \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & -\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{i\omega t} \\ -\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{-i\omega t} & +\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}(\sigma_+e^{i\omega t} + \sigma_-e^{-i\omega t}) \\ &= H_0 + H_1 \end{aligned}$$

avec  $\frac{\hbar\omega_1}{2} = \frac{q\hbar}{2}B_1$  (La frequence  $\omega_1$  mesure l'intensité de  $B_1$ )

ici  $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  "ladder ops"

satisfont

$$\sigma_+ | \downarrow \rangle = | \uparrow \rangle; \sigma_+ | \uparrow \rangle = 0$$

$$\sigma_- | \uparrow \rangle = | \downarrow \rangle; \sigma_- | \downarrow \rangle = 0$$

Nous voulons résoudre l'équation de Schrödinger qui est dépendante du temps.

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H_{tot}(t) |\Psi(t)\rangle$$

"Méthode du changement de référentiel"

$$\text{On pose } |\tilde{\Psi}(t)\rangle = e^{i\frac{t}{\hbar}K} |\Psi(t)\rangle \text{ avec } K = \begin{pmatrix} -\hbar\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & +\hbar\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}$$

Noter que K fait précéder le spin autre de z avec la fréquence  $-\omega$ . Dans ce référentiel on ne voit pas le champs  $\vec{B}_1$  tourner. Donc on s'attend:

$$\tilde{H} = -\frac{\hbar}{2}(\omega_0 - \omega)\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) \quad (\star)$$

La différence  $|\omega_0 - \omega| = \delta$  s'appelle "detuning"

Prouvons  $(\star)$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = -K |\tilde{\Psi}(t)\rangle + e^{i\frac{t}{\hbar}K} H(t) e^{-i\frac{t}{\hbar}K} |\tilde{\Psi}(t)\rangle$$

$$e^{i\frac{t}{\hbar}K} H_0 e^{-i\frac{t}{\hbar}K} = H_0 \text{ et aussi:}$$

$$e^{i\frac{t}{\hbar}K} H_0 e^{-i\frac{t}{\hbar}K} = -\frac{\hbar\omega_1}{2} \sigma_x$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \tilde{H}(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle$$

Ainsi  $\tilde{H}(t)$  est le générateur de la dynamique dans le nouveau référentiel

L'opérateur d'évolution dans le nouveau référentiel (tournant avec  $\vec{B}_+$ ) est

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t, 0) &= e^{-\frac{it}{\hbar}\tilde{H}} \\ &= e^{-\frac{it}{\hbar}(\delta\sigma_z - \omega_1\sigma_x)} \\ &= e^{-\frac{it}{\hbar}\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}\hat{m}\cdot\vec{\sigma}} \end{aligned}$$

avec  $\hat{m} = \left( -\frac{\omega_1}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}}, 0, \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}} \right)$  axe de rotation pour la précession du spin dans le nouveau référentiel.

$$e^{i\theta\hat{m}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\theta\mathbb{I} + i\sin\theta\hat{m}\cdot\vec{\sigma} \text{ (voir exercice)}$$

$$\text{ici } \hat{m}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}} & -\frac{\omega_1}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}} \\ -\frac{\omega_1}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}} & -\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \theta = \frac{t}{\hbar}\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}$$

et donc:

$$\tilde{U}(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2} + i\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2} & -i\frac{\omega_1}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}}\sin\theta\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2} \\ -i\frac{\omega_1}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}}\sin\theta\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2} & \cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2} - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{\delta^2 + \omega_1^2} \end{pmatrix}$$

Pour obtenir  $\tilde{U}(t, 0)$  on note:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-\frac{itK}{\hbar}} |\tilde{\Psi}(t)\rangle \\ &= e^{-\frac{itK}{\hbar}} \tilde{U}(t, 0) |\tilde{\Psi}(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{itK}{\hbar}} \tilde{U}(t, 0) |\Psi(0)\rangle \\ \Rightarrow U(t, 0) &= e^{-\frac{itK}{\hbar}} \tilde{U}(t, 0) \end{aligned}$$

= meme elements de matrice que précédement avec phase  $e^{i\frac{\omega t}{2}}$  et  $e^{-i\frac{\omega t}{2}}$  sur la diagonale

Remarque : Si le temps initial est de  $t_0$  on trouve :

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{itK}{\hbar}} \tilde{U}(t, t_0) e^{\frac{it_0K}{\hbar}}$$

Probabilité de transmission et Osillations de Rabi

$$Prob_{\uparrow \rightarrow \uparrow}(t) = |\langle \uparrow | U(t, 0) | \uparrow \rangle|^2$$

$$Prob_{\uparrow \rightarrow \downarrow}(t) = |\langle \downarrow | U(t, 0) | \uparrow \rangle|^2$$

ou on a utilisé le postulat de la mesure. On trouve :

$$\begin{aligned} Prob_{\uparrow \rightarrow \uparrow}(t) &= \frac{\omega_1^2}{\delta^2 + \omega_1^2} \sin^2\left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}\right) \\ Prob_{\uparrow \rightarrow \downarrow}(t) &= \frac{\delta^2}{\delta^2 + \omega_1^2} \sin^2\left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}\right) + \cos^2\left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}\right) \end{aligned}$$

INSERT FIGURE HERE

Cas non resonnant:  $\delta \gg \omega_1$ ;  $T \approx \frac{2\pi}{\delta}$  periode des oscillations de Rabi

Cas resonnant:  $\delta = 0$ ;  $T \approx \frac{2\pi}{\omega_1}$  periode des oscillations de Rabi

Cas non resonnant : Axe de rotation dans le referentiel tournant  $\vec{\mu} \approx z$ : precession de frequence  $\delta$  autour de  $\mu$  + precession de frequence  $\omega$  autour de z

Presque identique a la precession de frequence  $\omega_0$  autour de z

Cas resonnant: Axe de rotation dans le referentiel tournant  $\mu \approx x$ ; precession autour de x de frequence  $\omega_1$  + precession autour de z de frequence  $\omega$

Realisation de la porte NOT  $Prob_{\uparrow \rightarrow \downarrow}\left(\frac{T}{4} = \frac{\pi}{\omega_1}\right) = 1$   
 $\pi$ -pulse est un pulse de durée  $\frac{\pi}{\omega_1}$  qui reverse le spin :

$$|\uparrow\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle$$

$$|\downarrow\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle$$

avec probabilité 1.

Pour realiser NOT on place le spin du champs statique  $\vec{B}_0$ . Celui-ci s'aligne le long de  $\vec{B}_0$ ,  $|\uparrow\rangle$ . On applique un pulse de frequence  $\omega = \omega_0 = TOCOMPLETE\vec{B}_0$  pendant une durée  $\frac{\pi}{\omega_1}$ . Cela reverse le spin.

On verifie que  $U\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right) = iNOT$



Réalisation de la porte Hadamard

On utilise un  $\frac{\pi}{2\omega_i}$  pulse resonant ( $\omega = \omega_0$ ). Cela effectue la transition  $|\uparrow\rangle \rightarrow$  spin du plan xy

$$U\left(\frac{\pi}{2\omega_i}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Verification physique de la porte de Hadamard :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = H$$

$Prob_{\uparrow \rightarrow \uparrow} = 1/2$  et  $Prob_{\uparrow \rightarrow \downarrow} = 1/2$  pour un  $\frac{\pi}{2\omega_1}$  pulse; voir osci de Rabi

Application a la RMN: Lire Feynman lectures