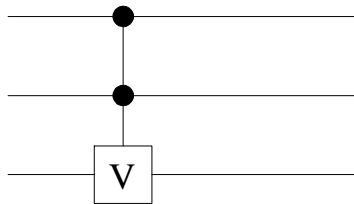


Test Bonus Traitement Quantique de l'Information II

1 Problème 1

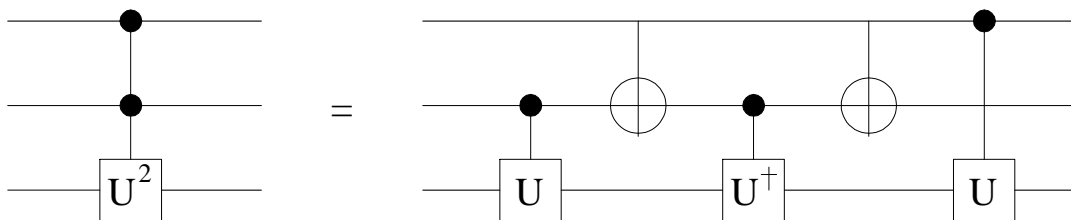
Soit V une matrice 2×2 unitaire.

La porte "double contrôle- V " notée CCV est définie par le circuit



Formellement $\text{CCV} |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |z\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes V^{xy} |z\rangle$. Donc V agit sur z si et seulement si $x = 1$ et $y = 1$.

1a) Montrez que pour tout U unitaire 2×2 :



1b) Comment choisir U pour réaliser la porte de Toffoli CCNOT? Donnez explicitement une telle matrice U .

2 Problème 2

On rappelle que la matrice 2×2

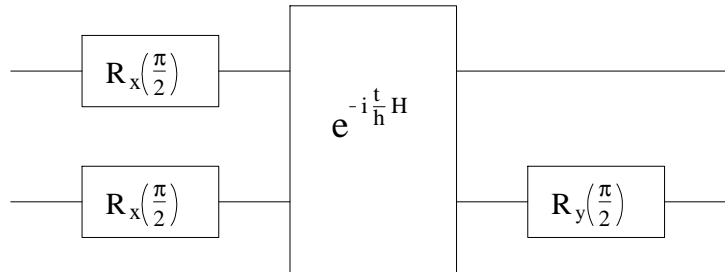
$$R_{\vec{n}}(\theta) = \exp\left(i\theta \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2}\right)$$

agit sur un spin en faisant une rotation d'angle θ et d'axe \vec{n} sur le vecteur représentant le spin sur la sphère de Bloch. Ici $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

D'autre part \vec{n} est un vecteur unité (à trois composantes).

On considère le circuit suivant:



pour l'Hamiltonien $H = \hbar J \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)}$ et $t = \frac{\pi}{4J}$.

2a) Calculez l'état de sortie si l'entrée est $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$.

Astuce: Il est conseillé d'utiliser la formule

$$\exp\left(i\theta \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{n}}{2}\right) = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right) \mathbf{1} + i \left(\sin \frac{\theta}{2}\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

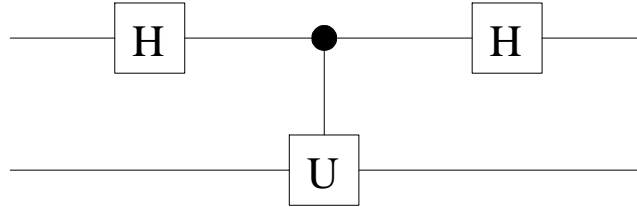
et de travailler en notation de Dirac. Si vous voulez travailler en composantes c'est aussi possible mais plus long: nous prendrons tous la même convention $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2b) Donnez l'état de sortie en notation de Dirac (si ce n'est pas déjà fait sous 2a) et démontrez que c'est un état intriqué.

2c) Dites en mots et en quelques lignes comment vous réaliseriez ce circuit avec la molécule de chloroforme $CHCl_3$ où C et H sont les noyaux actifs.

3 Problème 3

Soit U une matrice unitaire et $|u\rangle$ un vecteur propre, c'est à dire $U|u\rangle = \exp(2\pi i\varphi)|u\rangle$.
Considérez le circuit suivant



La boîte centrale signifie que le premier bit est contrôleur: U agit sur le deuxième bit seulement quand le premier vaut 1.

- 3a)** Calculez la sortie pour l'état initial $|0\rangle \otimes |u\rangle$.
- 3b)** Calculez la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|0\rangle$ à la sortie. Même question pour la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|1\rangle$ à la sortie. Même question pour les probabilités d'observer $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$, $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$, $\frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $\frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ à la sortie.
- 3c)** Supposons que l'on remplace U par U^k , k entier dans le circuit ci-dessus. Soit $\varphi = 0, \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_t$ le développement binaire de $0 < \varphi < 1$. Comment choisir k pour déterminer le bit le moins significatif φ_t en une seule mesure?