Solution de la série 9
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Algorithme de Grover pour $N = 4$*

1. On peut toujours trouver la réponse en maximum 3 questions. En effet lors de la 3ème question si on n'a pas encore présenté à l'oracle la bonne entrée, alors on sait que la dernière entrée restante est la bonne. Donc il y a 3 évémements :
   - trouver X_0 en 1 question ; prob=$\frac{1}{4}$.
   - trouver X_0 en 2 questions ; prob=$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
   - trouver X_0 en 3 questions ; prob=$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{4}$.

   Le nombre moyen de questions est :
   $$\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$
   En regardant la théorie on voit qu'une question suffit !
   L'entrée $|00\rangle$ est envoyée sur
   $$\begin{aligned} &|00\rangle \to |11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) \\ &\to \frac{1}{2}(|10\rangle - |11\rangle - |10\rangle - |11\rangle) = -|11\rangle \\ &\to -|00\rangle. \end{aligned}$$
   l'entrée $|10\rangle$ est envoyée sur
   $$\begin{aligned} &|10\rangle \to |01\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \\ &\to \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |00\rangle + |01\rangle) = |01\rangle \to |10\rangle. \end{aligned}$$
   et on vérifie aussi $|01\rangle \to |01\rangle$ et $|11\rangle \to |11\rangle$.
   Etapes de l'algorithme : On supposons $X_0 = 00$ sans perte de géneralité.
   (a) État initial $|001\rangle$.
   (b) $H^{\otimes 3}|001\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big) \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)$.

(c) Après l'oracle :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{&|00\rangle \otimes (|f(00)\rangle - |\overline{f(00)}\rangle)\\ &+ |01\rangle \otimes \big(|f(01)\rangle - |\overline{f(01)}\rangle\big)\\ &+ |10\rangle \otimes \big(|f(10)\rangle - |\overline{f(10)}\rangle\big)\\ &+ |11\rangle \otimes \big(|f(11)\rangle - |\overline{f(11)}\rangle\big)\big\}.\end{aligned}$$

Puisque $f(00) = 1$ et $f(01) = f(10) = f(11) = 0$ on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{&|00\rangle \otimes (|1\rangle - |0\rangle)\\ &+ |01\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\\ &+ |10\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\\ &+ |11\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big\}.\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Notez que la future solution est "marquée par la phase -1". C'est le fameux phénomène de "kick back phase".
Maintenant on applique $H^{\otimes 2}$ au premier registre. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\big\{&-|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &+ |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\\ &+ |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &+ |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).\end{aligned}$$

On applique le changement de signe conditionnel : uniquement $|00\rangle$ change de signe :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\big\{&+|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &- |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\\ &- |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &- |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).\end{aligned}$$

Peut-être qu'une bonne idée est de procéder à des simplifications avant de continuer. Cela donne :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\left\{-2|00\rangle - 2|01\rangle - 2|10\rangle - 2|11\rangle\right\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\quad = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\left\{+|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\quad = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{H^{\otimes 2}|00\rangle}_{\text{Ô surprise !}}) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = -H^{\otimes 3}(|001\rangle).
\end{aligned}
$$

Maintenant on applique la dernière série de portes de Hadamard $H^{\otimes 3}$. Puisque $H^2 = 1$ on trouve l'état final $-|00\rangle \otimes |1\rangle$. La mesure du premier registre donne $X_0 = 00$ avec probabilité 1.

Exercice 2 *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

- $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc

$$
R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.
$$

- La porte de Hadamard est comme d'habitude $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- Pour l'Hamiltonien on a :

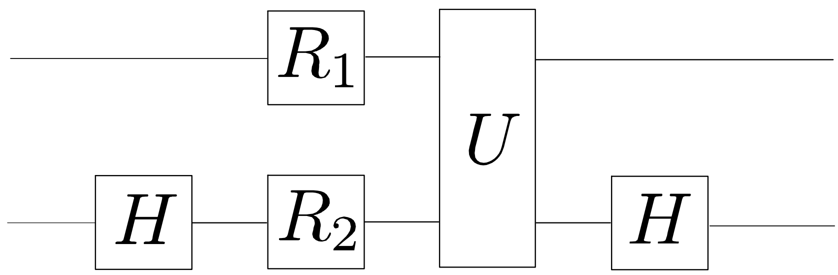
$$
\mathcal{H} = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

- Si on laisse évoluer pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$ on trouve

$$
U = \exp(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}) = \exp(-\frac{i\pi}{4J\hbar}\mathcal{H}) = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix},
$$

$$
\Rightarrow U = \exp(-i\frac{\pi}{4}). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Le produit des matrices correspond au circuit suivant :



Sur le dessin l'état $|\psi\rangle$ entre par la gauche et la sortie est à droite $(I_{2\times2} \otimes H)U(R_1 \otimes R_2)(I_{2\times2} \otimes H)|\psi\rangle$.
Calculons le produit :

$$\begin{aligned}
R_1 \otimes R_2 &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
U(R_1 \otimes R_2) &= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$I_{2\times2} \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

finalement on trouve

$$(I_{2\times 2}\otimes H)U(R_1\otimes R_2)(I_{2\times 2}\otimes H) = e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Cette matrice est égale à

$$\begin{aligned} & e^{-i\frac{3\pi}{4}}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\otimes\sigma_x - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\otimes\mathbb{1}\right\} \\ &= e^{-i\frac{3\pi}{4}}\{-|0\rangle\langle 0|\otimes\sigma_x + |1\rangle\langle 1|\otimes\mathbb{1}\}. \end{aligned}$$

Cette operation est une sorte de CNOT (mais par le CNOT standard).

Remarque : Pour obtenir la porte CNOT standard il faut utiliser des rotations avec un autre signe (c.a.d d'angle opposé) :

$$R_1 = \exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^2}{2}) \text{ et } R_2 = \exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^2}{2}).$$

On obtient alors (si on ne fait pas d'erreurs de signes !)

$$\begin{aligned} (I_{2\times 2}\otimes H)U(R_1\otimes R_2)(I_{2\times 2}\otimes H) &= e^{i\frac{3\pi}{4}}\{|0\rangle\langle 0|\otimes\mathbb{1} + |1\rangle\langle 1|\otimes\sigma_x\} \\ &= e^{i\frac{3\pi}{4}}\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{CNOT standard}} \end{aligned}$$