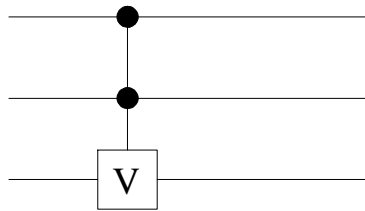


Série 5 Traitement quantique de l'information II

Exercice 1

Soit V une matrice 2×2 unitaire.

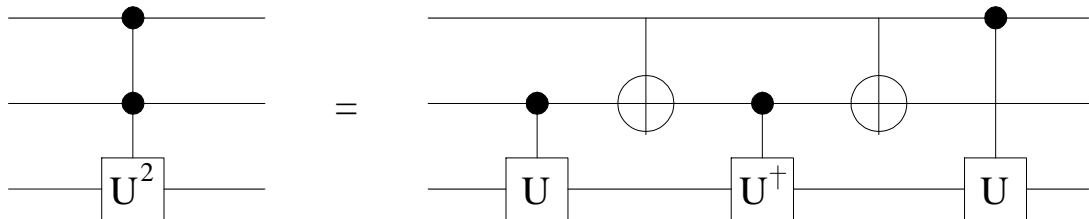
La porte "double contrôle- V " notée CCV est définie par le circuit suivant :



i.e.

$$\text{CCV } |x, y, z\rangle := |x, y\rangle \otimes V^{xy} |z\rangle$$

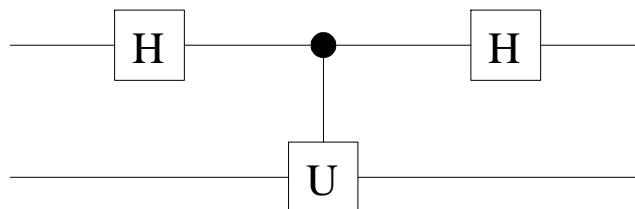
1. Montrez que pour tout U unitaire 2×2 :



2. Comment choisir U pour réaliser la porte de Toffoli CCNOT ? Donnez explicitement une telle matrice U .

Exercice 2

Soit U une matrice unitaire et $|u\rangle$ un vecteur propre, c'est à dire $U |u\rangle = \exp(2\pi i\varphi) |u\rangle$.
 Considérez le circuit suivant :



1. Calculez la sortie pour l'état initial $|0\rangle \otimes |u\rangle$.

2. Calculez la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|0\rangle$ à la sortie. Même question pour la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|1\rangle$ à la sortie. Même question pour les probabilités d'observer $\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$; $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$; $\frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ et $\frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ à la sortie.
3. Supposons que l'on remplace U par U^k , k entier dans le circuit ci-dessus. Soit $\varphi = 0, \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_t$ le développement binaire de $0 < \varphi < 1$. Comment choisir k pour déterminer le bit le moins significatif φ_t en une seule mesure ?