Solution de la série 4
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Algorithme : probabiliste versus quantique*

1. Pour montrer que $|\langle j| U |i\rangle|^2 = R_{ji}$ est une matrice stochastique, il faut verifier que $\sum_{j=0}^{n-1} P_{ji} = 1$ et $0 \leq P_{ji} \leq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} P_{ji} &= \sum_{j=0}^{n-1} |\langle j| U |i\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \langle i| U^\dagger |j\rangle \langle j| U |i\rangle \\ &= \langle i| U^\dagger \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \langle j| U |i\rangle = \langle i| U^\dagger U |i\rangle \\ &= \langle i| i\rangle = 1\end{aligned}$$

Notez que tous les termes $|\langle j| U |i\rangle|^2$ sont positifs, c'est pourquoi $0 \leq P_{ji} \leq 1$.

2. La probabilité d'observer l'état 2 à la sortie est

$$\mathrm{Prob}(2) = P_{00}Q_{20} + P_{10}Q_{21} + P_{20}Q_{22}.$$

3. – La probabilité d'observer l'état $|2\rangle$ à la sortie est

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(|2\rangle) &= |\langle 2| U_2U_1 |0\rangle|^2 = \langle 2| U_2U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger U_2^\dagger |2\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |j\rangle \langle j| U_2^\dagger |2\rangle \\ &= \sum_{i=j} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |i\rangle \langle i| U_2^\dagger |2\rangle \\ &+ \sum_{i\neq j} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |j\rangle \langle j| U_2^\dagger |2\rangle\end{aligned}$$

Notez que la première somme est la probabilité d'observer l'état 2 à la sortie dans le cas classique :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |i\rangle \langle i| U_2^\dagger |2\rangle &= \sum_{i=0}^{2} |\langle 2| U_2 |i\rangle|^2 |\langle i| U_1 |0\rangle|^2 \\ &= P_{00}Q_{20} + P_{10}Q_{21} + P_{20}Q_{22}\end{aligned}$$

La deuxième somme est un terme d'interférence quantique.

– En faisant la mesure intermédiaire après la première étape on observe
- $|0\rangle$ avec la probabilité $|\langle 0| U_1 |0\rangle|^2$,
- $|1\rangle$ avec la probabilité $|\langle 1| U_1 |0\rangle|^2$,
- $|2\rangle$ avec la probabilité $|\langle 2| U_1 |0\rangle|^2$.
La probabilité d'observer l'état final $|2\rangle$ à la sortie est

$$|\langle 0| U_1 |0\rangle|^2 \, |\langle 2| U_2 |0\rangle|^2 + |\langle 1| U_1 |0\rangle|^2 \, |\langle 2| U_2 |1\rangle|^2 + |\langle 2| U_1 |0\rangle|^2 \, |\langle 2| U_2 |2\rangle|^2$$

qui correspond au cas classique.

Exercice 2 *Vérification pour bonne compréhension si besoin est*

(a) Prendre b=0 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^{1} |c\rangle.$$

Prendre b=1 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c=0}^{1} (-1)^c |c\rangle.$$

Pour $m = 2$:

$$\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|0_2\rangle = H \otimes H|00\rangle &= H \otimes H|0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= H|0\rangle \otimes H|0\rangle \\
&= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2})^2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle).
\end{aligned}$$

Pour $m = 3$ procéder de la même manière.

$$\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|b_1 b_2\rangle &= H|b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c_1} (-1)^{b_1 c_1} |c_1\rangle \otimes \sum_{c_2} (-1)^{b_2 c_2} |c_2\rangle \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \sum_{c_1, c_2} (-1)^{b_1 c_1} (-1)^{b_2 c_2} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \sum_{c_1 c_2} (-1)^{b_1 c_1 + b_2 c_2} |c_1 c_2\rangle.
\end{aligned}$$

Exercice 3 *Algorithme de Simon*

Ici le carré est partitionné comme suit :
Soit $X = \{\alpha, \beta\}$. On a $f(00) = f(10) = \alpha$ et $f(01) = f(11) = \beta$.
L'état initial est $|0000\rangle$. Après les premières portes de Hadamard :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\big(|0000\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle + |1100\rangle\big).$$

Après l'oracle :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\big(|00\rangle \otimes |f(00)\rangle + |01\rangle \otimes |f(01)\rangle + |10\rangle \otimes |f(10)\rangle + |11\rangle \otimes |f(11)\rangle\big).$$

Ce qui est égal à

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\big(|00\rangle|\alpha\rangle + |10\rangle|\alpha\rangle + |01\rangle|\beta\rangle + |11\rangle|\beta\rangle)\\ &= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\big((|00\rangle + |10\rangle)|\alpha\rangle + (|01\rangle + |11\rangle)|\beta\rangle\big).\end{aligned}$$

On applique les deux dernières portes de Hadamard :

$$\begin{aligned}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\Big\{&(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes |\alpha\rangle\\ &+ (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \otimes |\alpha\rangle\\ &+ (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \otimes |\beta\rangle\\ &+ (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \otimes |\beta\rangle\Big\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\big\{|00\rangle \otimes (2|\alpha\rangle + 2|\beta\rangle) + |01\rangle \otimes (2|\alpha\rangle - 2|\beta\rangle)\big\}.$$

Remarquez que les autres termes correspondant à $|10\rangle$ et $|11\rangle$ donnent zéro.
La mesure des deux premiers qubits réduit l'état à $|00\rangle$ ou $|01\rangle$ (pour les deux premiers qubits). Donc on obtient les vecteurs (00) ou (01) $\perp$ à $\vec{a} = (10)$.
Dès que l'on obtient (01) (en répétant l'expérience si besoin est c.à.d au cas où l'on manque de chance on tombe sur (00) ...) on résoud l'équation (condition d'orthogonalité)

$$a_1.0 + a_2.1 = 0,$$

qui possède la solution non triviale unique $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.