Solution de la série 3
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Variation sur le problème de Deutsch-Josza*

1. Comme le vecteur $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_m)$ possède m composantes, il faut m équations du type $f(\underline{x}) = \underline{a}.\underline{x} + b$ pour le déterminer. Donc il faut m valeurs de $f(\underline{x})$ et il faut poser m questions à l'oracle classique.

2. Preuve :

$$\begin{aligned}
\sum_{\underline{x}\in\mathbb{F}_2^m} (-1)^{\underline{x}\cdot\underline{z}} &= \sum_{x_1,\cdots,x_m} (-1)^{x_1 z_1}(-1)^{x_2 z_2}\cdots(-1)^{x_m z-m} \\
&= (\sum_{x_1}(-1)^{x_1 z_1})(\sum_{x_2}(-1)^{x_2 z_2})\cdots(\sum_{x_m}(-1)^{x_m z_m}) \\
&= (1+(-1)^{z_1})(1+(-1)^{z_2})\cdots(1+(-1)^{z_m}).
\end{aligned}$$

Si $(z_1, \cdots, z_m) = (0, \cdots, 0)$ on trouve 2^m. Mais si au moins un des $z_i \neq 0$ (donc $z_i = 1$) alors puisque $1 + (-1)^{z_i} = 1 + (-1) = 0$, on trouve 0 pour le produit ci-dessus.

3. En reprenant le circuit quantique de Deutsch-Josza du cours, l' état final de sortie juste avant la mesure est :

$$|\psi_{fin}\rangle = \sum_{c_1,\cdots,c_m} |c_1, \cdots, c_m\rangle \{\frac{1}{2^m}\sum_{\underline{x}}(-1)^{f(x)}(-1)^{\underline{x}\cdot\underline{c}}\} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Pour $f(\underline{x}) = \underline{a}.\underline{x} \oplus b$ on a grâce à l'indication :

$$\sum_{\underline{x}}(-1)^{f(x)}(-1)^{\underline{x}\cdot\underline{c}} = (-1)^b\sum_{\underline{x}}(-1)^{(\underline{a}\oplus\underline{c})\cdot\underline{x}} = \begin{cases} 2^m & \text{si } \underline{a}\oplus\underline{c} = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

que

$$|\psi_{fin}\rangle = (-1)^b\,|a\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|0\rangle - |1\rangle)$$

Ce résultat est remarquable car avec une seule mesure des m premiers qubits on trouve $\underline{a}$ avec probabilité 1 !

où $\omega_0 = gB_0/2$. Les valeurs propres de l'Hamiltonien (les niveaux d'énergies possibles) sont égales à $E_\uparrow = -\hbar\omega_0$, $E_\downarrow = +\hbar\omega_0$ et leurs vecteurs propres associés sont $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$.

1. Les fractions N_i/N étant proportionnelles à $e^{-\frac{E_i}{kT}}$, cela veut dire qu'il existe une constante Z^{-1} telle que
$$\frac{N_i}{N} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$
Comme $N_\uparrow + N_\downarrow = N$, on peut dès lors écrire le système d'équations suivant :
$$\begin{aligned} N_\uparrow &= \frac{N}{Z} e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} \\ N_\downarrow &= \frac{N}{Z} e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}} \\ N &= \frac{N}{Z}\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} + e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}}\right) = 2\frac{N}{Z}\cosh\frac{\hbar\omega_0}{kT} \end{aligned}$$
On trouve finalement :
$$\begin{aligned} N_\uparrow &= \frac{N}{2\cosh\frac{\hbar\omega_0}{kT}} e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} \\ N_\downarrow &= \frac{N}{2\cosh\frac{\hbar\omega_0}{kT}} e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}} \end{aligned}$$

2. Une particule du groupe $N_\uparrow$ se trouve dans l'état $|\uparrow\rangle$ et la valeur moyenne de son aimantation (c'est un vecteur) est
$$\langle\uparrow|\vec{\mu}|\uparrow\rangle = \frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}\langle\uparrow|\sigma_x|\uparrow\rangle \\ \langle\uparrow|\sigma_y|\uparrow\rangle \\ \langle\uparrow|\sigma_z|\uparrow\rangle\end{pmatrix} = \frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
Pour une particule du groupe $N_\downarrow$, dans l'état $|\downarrow\rangle$, on trouve similairement
$$\langle\downarrow|\vec{\mu}|\downarrow\rangle = -\frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
Le vecteur aimantation $\vec{M}$ de l'échantillon se calcule en sommant les contributions (les aimantations) des particules $N_\downarrow$ et $N_\uparrow$ et on obtient :
$$\begin{aligned} \vec{M} &= N_\uparrow\langle\uparrow|\vec{\mu}|\uparrow\rangle + N_\downarrow\langle\downarrow|\vec{\mu}|\downarrow\rangle = \frac{g\hbar}{2}(N_\uparrow - N_\downarrow)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{g\hbar N}{4\cosh\frac{\hbar\omega_0}{kT}}\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - e^{-\frac{\hbar\omega_0}{kT}}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{g\hbar N}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{kT}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$
L'aimantation est dirigée selon l'axe z dans le même sens que $\vec{B}_0$. On remarque aussi que si la température devient grande $T \to \infty$, alors $\tanh\frac{\hbar\omega_0}{kT}$ devient nul et l'aimantation totale devient nulle. Si au contraire $T \to 0$ la $\tanh\frac{\hbar\omega_0}{kT}$ vaut 1 et l'aimantation est maximum.

3. Après le $\frac{\pi}{2}$ pulse, on est dans une situation où une quantité de particules $N_\uparrow$ se trouve dans l'état $|+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ et une quantité $N_\downarrow$ se trouve dans l'état $|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$. On a vu en cours que les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ soumis au champs $\vec{B}_0$ vont évoluer au cours du temps (à une phase globale près) de la façon suivante :

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + e^{i\omega_0 t}|\downarrow\rangle\right)$$
$$|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - e^{i\omega_0 t}|\downarrow\rangle\right)$$

On recalcule l'aimantation $\vec{M}(t)$ de la même manière qu'au point précédent à ceci près que les quantités dépendent du temps. On trouve pour les particules du groupe $N_\uparrow$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\langle\uparrow| + e^{-i\omega_0 t}\langle\downarrow|\right)\vec{\mu}\left(|\uparrow\rangle + e^{i\omega_0 t}|\downarrow\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\langle\uparrow|\vec{\mu}|\uparrow\rangle + e^{-i\omega_0 t}\langle\downarrow|\vec{\mu}|\uparrow\rangle + e^{i\omega_0 t}\langle\uparrow|\vec{\mu}|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\vec{\mu}|\downarrow\rangle\right)\\
&= \frac{g\hbar}{4}\begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}\\ ie^{-i\omega_0 t} - ie^{i\omega_0 t}\\ 0\end{pmatrix} = \frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De la même manière pour une particule du groupe $N_\downarrow$ on trouve :

$$-\frac{g\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}$$

On a alors que l'aimantation totale de l'échantillon est à présent :

$$\vec{M}(t) = \frac{g\hbar N}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{kT}\begin{pmatrix}\cos\omega_0 t\\ \sin\omega_0 t\\ 0\end{pmatrix}$$

L'aimantation est dirigée dans le plan xy et tourne dans ce plan avec une fréquence ω_0.

4. On rappelle que le vecteur $\vec{S}$ est un vecteur perpendiculaire à la surface (dans notre cas $\vec{S}$ est orienté selon l'axe y) et de norme égale à l'aire de la surface. Le flux dans une spire est alors

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \vec{S}\cdot\vec{M}\\
&= \frac{g\hbar N}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{kT}\sin\omega_0 t
\end{aligned}$$

La tension aux extrémités d'une spire de la bobine est alors (par la loi de Faraday) :

$$\begin{aligned}
u(t) &= -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}\\
&= -\frac{g\hbar N}{2}\tanh\frac{\hbar\omega_0}{kT}\cos\omega_0 t
\end{aligned}$$

Comme les spires sont montées en séries, la tension totale $U(t)$ dans la bobine est

$$U(t) = -\frac{g\hbar N n}{2} \tanh \frac{\hbar\omega_0}{kT} \cos \omega_0 t$$

D'après la loi d'Ohm le courant est alors

$$I(t) = U(t)/R = -\frac{g\hbar N n}{2R} \tanh \frac{\hbar\omega_0}{kT} \cos \omega_0 t$$

5. Avec l'indication, la transformée de Fourier du courant $I(t)$ est

$$\mathcal{F}(I)(\omega) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{g\hbar N n}{2R} \tanh \frac{\hbar\omega_0}{kT} \left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right)$$

On devrait donc observer deux pics et leur position nous renseigne sur la valeur de ω_0 (ils sont centré en $\pm\omega_0$). Ensuite comme R, n, T (et évidemment g , $\hbar$, k) sont connus, l'amplitude du pic nous fournis directement la valeur de N : le nombre de particules de l'échantillon.

6. On rappelle que la transformée de Fourier d'un produit de fonction est la convolution des transformées de Fourier de ces fonctions i.e.

$$\mathcal{F}(f \cdot g)(\omega) = \int \mathcal{F}(f)(\nu) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega - \nu)\, d\nu$$

La convolution avec une fonction delta étant triviale on obtient finalement :

$$\mathcal{F}(I_r)(\omega) = -\frac{g\hbar N n}{2\sqrt{2\pi}R} \tanh \frac{\hbar\omega_0}{kT} \left(\frac{\tau}{1 + (\omega + \omega_0)^2 \tau^2} + \frac{\tau}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}\right)$$

Les deux pics sont toujours centrés en $\pm\omega_0$ mais la hauteur est à présent multipliée par τ. Pour connaître τ , il faut mesure la largeur du pic à la mi-hauteur. Cette largeur vaut $\frac{2}{\tau}$. Ensuite il devient possible de retrouver N comme dans le point précédent.