Solution de la série 1
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Interféromètre de Mach-Zehnder*

On admettra que les réflections sur les miroirs produisent un déphasage de i.

1. L'état initial est : $|h\rangle$
   Après le 1[er] miroir semi-transparent : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i\,|v\rangle)$.
   Après les deux déphaseurs : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|h\rangle + ie^{i\varphi_2}\,|v\rangle)$.
   Après les miroirs réflichissants : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|v\rangle - ie^{i\varphi_2}\,|h\rangle)$.
   Après 2[ém] miroir semi-transparent :
   $$\begin{aligned}&\frac{ie^{i\varphi_1}}{2}(i\,|h\rangle + |v\rangle) - \frac{e^{i\varphi_i}}{2}(|h\rangle + i\,|v\rangle)\\ &= \frac{1}{2}[-(e^{i\varphi_1}+e^{i\varphi_2})\,|h\rangle + i(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2})\,|v\rangle]\\ &= -\frac{e^{i\varphi_1}}{2}[(1+e^{i\Delta\varphi})\,|h\rangle - i(1-e^{i\Delta\varphi})\,|v\rangle]\\ &= |\psi_{\text{fin}}\rangle\,,\end{aligned}$$
   avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
2. La probabilité de détection en D_1 est
   $$\begin{aligned}\text{prob}(D_1) &= |\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2\\ &= \frac{1}{4}|1+e^{i\Delta\varphi}|^2\\ &= \frac{1}{4}|e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}|^2\\ &= \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}).\end{aligned}$$
   Probabilité de détection en D_2 est $|\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 = \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$. Ces probabilités dépendent seulement de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, donc seules les <u>différences de phases sont mesurables</u> et non pas les "phases absolues ou globales".
3. – Miroir semi-transparent $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1\end{pmatrix}$ (matrice unitaire)
   – Miroir réflichissant $= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$ (matrice unitaire)

$$|\Psi_{\text{initial}}\rangle \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow |\Psi_{\text{fin}}\rangle$$

Mesure dans détecteurs

Fig. 1 – circuit correspondant à l'interféromètre

– Déphaseurs (cristaux) $= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$ (matrices unitaires)

$$\text{produit} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

Pour le circuit correspondant voir figure 1 :

Remarque : On peut aussi vérifier :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}_{\frac{\pi}{2}\text{shift}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{H (Hadamard)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Donc pour réaliser une porte de Hadamard physiquement on peut utiliser

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}}_{Beamersplitter} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{-\frac{\pi}{2}\text{shift}}.$$

D'autrepart

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{i}_{\text{phase globale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{NOT \text{ or } X}.$$

Le circuit ci-dessus est aussi équivalent à

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \boxed{\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{NOT} \longrightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \downarrow$$

Mesure dans base $\{|0\rangle,\ |1\rangle\}$

Fig. 2 – circuit équivalent

Exercice 2 *Propriétés des matrices de Pauli*

1. On a :

$$A = a_0 I + a_1\sigma_x + a_2\sigma_y + a_3\sigma_z = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. On doit avoir :

$$\begin{cases} a_0 + a_3 = a_{11} \\ a_0 - a_3 = a_{22} \end{cases}$$

ce qui implique $a_0 = \dfrac{a_{11} + a_{22}}{2}$ et $a_3 = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2}$.
D'autre part on doit avoir :

$$\begin{cases} a_1 - ia_2 = a_{12} \\ a_1 + ia_2 = a_{21} \end{cases}$$

ce qui implique $a_1 = \dfrac{a_{12} + a_{21}}{2}$ et $a_2 = \dfrac{a_{21} - a_{12}}{2i}$.
Donc toute matrice 2×2 A peut s'écrire :

$$A = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} I + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \sigma_x + \frac{a_{21} - a_{12}}{2i} \sigma_y + \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sigma_z.$$

Notez que si $A = A^\dagger$ on doit avoir a_0, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$.
Nous vérifions à chaque fois uniquement la première relation.

2.

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i\sigma_z \end{aligned}$$

Les autres calculs sont similaires. Remarquez que les relations s'obtiennent de la première par permutation cyclique de xyz.

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Puisque $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$ on a :

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2\sigma_x \sigma_x.$$

Puisque $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ on déduit $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$.

3.

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z \qquad \text{par définition}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 &= (n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z)(n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z) \\
&= n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2 + n_z^2 \sigma_z^2 \\
&+ n_x n_y \sigma_x \sigma_y + n_y n_x \sigma_y \sigma_x \\
&+ n_x n_z \sigma_x \sigma_z + n_z n_x \sigma_z \sigma_x \\
&+ n_y n_z \sigma_y \sigma_z + n_z n_y \sigma_z \sigma_y \\
&= \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) I = I
\end{aligned}$$

Dans la seconde égalité on a fait attention au fait que les matrices de Pauli ne commutent pas. Dans la troisième on a utilisé les relations sous 2. Dans la dernière égalité on a utilisé que $\vec{n}$ est un vecteur unité (sa norme vaut 1).
Cette identité implique $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^3 = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}; (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^4 = I;$ etc...
Ainsi

$$\begin{aligned}
\exp(it\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^k \\
&= \sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} I + \left\{ \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} \right\} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\cos t = \sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad i \sin t = \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} \tag{*}$$

(Voir un formulaire) ou bien notez que :

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad \text{et donc :}$$

$$\sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} + \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} = \cos t + i \sin t,$$

ensuite en changeant $t \to -t$ on a aussi

$$\sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} - \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} = \cos t - i \sin t,$$

et en additionnant et soustrayant on trouve $(*)$
finalement on a bien prouvé :

$$\exp(it\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\cos t) I + (i \sin t) \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

4. Diagonalisation de σ_x.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 = \lambda v_2 \\ v_2 = \lambda v_1 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow v_1 = \lambda^2 v_1$ et $v_2 = \lambda^2 v_2$. Pour avoir $v_1 \; v_2 \neq 0$ il faut $\lambda^2 = +1$ et donc $\lambda = \pm 1$.
les valeurs propres sont ± 1.
Le vecteur propre associé à $\lambda = +1$ satisfait à

$$v_1 = v_2 \qquad \text{et} \qquad v_2 = v_1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé}$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = -1$ satisfait à :

$$v_1 = -v_2 \qquad \text{et} \qquad v_2 = -v_1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé}$$

Diagonalisation de σ_y.
On peut procéder comme avant. On peut aussi trouver les valeurs propres en résolvant :

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (-i)(i) = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = +1$ satisfait à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} -iv_2 = v_1 \\ iv_1 = v_2 \end{array} \right.$$

Les deux équations sont identiques. On choisi $v_1 = 1$ et $v_2 = i$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé}$$

Pour le vecteur propre associé à -1 on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} -iv_2 = -v_1 \\ iv_1 = -v_2 \end{array} \right.$$

On choisi $v_1 = 1$ et $v_2 = -i$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{est un vecteur propre normalisé.}$$

Diagonalisation de σ_z.

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dans la base} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc 1 est la valeur propre associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et -1 est la valeur propre associée à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trace. La trace d'une matrice est égale à la somme des élements diagonaux. Celle-ci est aussi égale à la somme des valeurs propres. On vérifie que tout est consistent et que $\mathrm{Tr}\,\sigma_x = \mathrm{Tr}\,\sigma_y = \mathrm{Tr}\,\sigma_z = 0$.

Déterminant. Le déterminant est égal à $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Mais c'est aussi le produit des valeurs propres. On vérifie que tout est consistent et que $\det \sigma_x = \det \sigma_y = \det \sigma_z = -1$.

5. En notation de Dirac on a :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \left|\uparrow\right\rangle \left\langle\uparrow\right| + a_{12} \left|\uparrow\right\rangle \left\langle\downarrow\right| + a_{21} \left|\downarrow\right\rangle \left\langle\uparrow\right| + a_{22} \left|\downarrow\right\rangle \left\langle\downarrow\right|.$$

En fait, il est utile de réaliser que ceci est consistent avec

$$\left\langle\uparrow\right| A \left|\uparrow\right\rangle = a_{11};\ \left\langle\uparrow\right| A \left|\downarrow\right\rangle = a_{12};\ \left\langle\downarrow\right| A \left|\uparrow\right\rangle = a_{21} \ \text{ et } \ \left\langle\downarrow\right| A \left|\downarrow\right\rangle = a_{22}.$$

D'autre part

$$\left|\uparrow\right\rangle \left\langle\uparrow\right| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \left|\uparrow\right\rangle \left\langle\downarrow\right| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ \left|\downarrow\right\rangle \left\langle\uparrow\right| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \left|\downarrow\right\rangle \left\langle\downarrow\right| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant la vérification demandée est triviale. Le problème aux valeurs propres en notation de Dirac s'écrit :

$$A \left|\psi\right\rangle = \lambda \left|\psi\right\rangle$$

ou bien

$$\left(a_{11} \left|\uparrow\right\rangle \left\langle\uparrow\right| + a_{12} \left|\uparrow\right\rangle \left\langle\downarrow\right| + a_{21} \left|\downarrow\right\rangle \left\langle\uparrow\right| + a_{22} \left|\downarrow\right\rangle \left\langle\downarrow\right|\right) \left(\alpha \left|\uparrow\right\rangle + \beta \left|\downarrow\right\rangle\right) = \lambda\alpha \left|\uparrow\right\rangle + \lambda\beta \left|\downarrow\right\rangle$$

$$\alpha a_{11} \left|\uparrow\right\rangle + \alpha a_{21} \left|\downarrow\right\rangle + \beta a_{12} \left|\uparrow\right\rangle + \beta a_{22} \left|\downarrow\right\rangle = \lambda\alpha \left|\uparrow\right\rangle + \lambda\beta \left|\downarrow\right\rangle$$

$$(\alpha a_{11} + \beta a_{12}) \left|\uparrow\right\rangle + (\alpha a_{21} + \beta a_{22}) \left|\downarrow\right\rangle + = \lambda\alpha \left|\uparrow\right\rangle + \lambda\beta \left|\downarrow\right\rangle$$

Cela signifie :

$$\begin{cases} \alpha a_{11} + \beta a_{12} = \lambda\alpha \\ \alpha a_{21} + \beta a_{22} = \lambda\beta \end{cases}$$

Ce qui est bien sûr equivalent à la version matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ou bien encore

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par la condition $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et donc

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \;\; \text{etc...}$$