Solution de la série 11
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1

L'état initial du système total est $\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|$.

a,c)

$$\begin{aligned}
U\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|U^+ =& (|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X)(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|)(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X) \\
=& (|0\rangle\langle 0|\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\rho_S \otimes X|0\rangle\langle 0|)(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X) \\
=& |0\rangle\langle 0|\rho_S|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\rho_S|0\rangle\langle 0| \otimes X|0\rangle\langle 0| \\
&+ |0\rangle\langle 0|\rho_S|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|X + |1\rangle\langle 1|\rho_S|1\rangle\langle 1| \otimes X|0\rangle\langle 0|X
\end{aligned}$$

La trace partielle sur l'environnement, prise terme à terme donne

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, U\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|U^+ = |0\rangle\langle 0|\rho_S|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\rho_S|1\rangle\langle 1|$$

On a utilisé les relations

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, |0\rangle\langle 0| = 1;$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, X|0\rangle\langle 0| = \langle 0|X|0\rangle = 0;$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, |0\rangle\langle 0|X = 0;$$

$$\text{et } \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, X|0\rangle\langle 0|X = \langle 0|X^2|0\rangle = 1;$$

Nous voyons que $\rho_S^{'} = E_0\rho_S E_0^+ + E_1\rho_S E_1^+$ avec $E_0 = |0\rangle\langle 0|$ et $E_1 = |1\rangle\langle 1|$. On vérifie que

$$E_0^+E_0 + E_1^+E_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \mathbb{I}$$

b,c)

$$\begin{aligned}
U\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|U^+ &= \left(\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes I + \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X\right)(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes I + \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X\right)\\
&= \left(\frac{X}{\sqrt{2}}\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{Y}{\sqrt{2}}\rho_S \otimes X|0\rangle\langle 0|\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes I + \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X\right)\\
&= \frac{X}{\sqrt{2}}\rho_S\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{X}{\sqrt{2}}\rho_S\frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\langle 0|X\\
&+ \frac{Y}{\sqrt{2}}\rho_S\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes X|0\rangle\langle 0| + \frac{Y}{\sqrt{2}}\rho_S\frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X|0\rangle\langle 0|X
\end{aligned}$$

La trace partielle sur l'environement donne :

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, U\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|U^+ = \frac{X}{\sqrt{2}}\rho_S\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\rho_S\frac{Y}{\sqrt{2}}$$

en utilisant comme avant,

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, |0\rangle\langle 0| = 1;$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, |0\rangle\langle 0|X = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, X|0\rangle\langle 0| = 1$$

$$\text{et } \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}\, X|0\rangle\langle 0|X = 1.$$

L'opération finale sur S est :

$$\rho_S^{'} = \frac{1}{2}X\rho_S X + \frac{1}{2}Y\rho_S Y = E_0\rho_S E_0^+ + E_1\rho_S E_1^+$$

avec $E_0 = \frac{X}{\sqrt{2}}$ et $E_1 = \frac{Y}{\sqrt{2}}$. On a bien

$$E_0^+E_0 + E_1^+E_1 = \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} = \frac{\mathbb{I}}{2} + \frac{\mathbb{I}}{2} = \mathbb{I}$$

comme requis.

Exercice 2

Bit-flip :

$$\rho^{'} = (1-p)\rho + pX\rho X$$

Prenons $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma})$. Alors

$$\rho^{'} = \frac{1-p}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}) + \frac{p}{2}(X^2 + X\vec{N}\cdot\vec{\sigma}X).$$

Puisque $X^2 = I$ et $XYX = -X^2Y = -Y$, $XZX = -Z$ et $XXX = X$ on obtient

$$
\begin{aligned}
\rho^{'} =& \frac{1-p}{2}(I + n_x X + n_y Y + n_z Z) + \frac{p}{2}(I + n_x X - n_y Y - n_z Z) \\
=& \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}n_x X + \frac{1-2p}{2}n_y Y + \frac{1-2p}{2}n_z Z
\end{aligned}
$$

L'application sur la sphère de Bloch est donc

$$\vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N}' = (n_x, (1-2p)n_y, (1-2p)n_z)$$

Pour $0 < p < \frac{1}{2}$ cela correspond à une contraction du plan yz, l'axe x restant inchangé. La surface de la sphère devient un ellipsoïde d'axes $(1, \sqrt{1-2p}, \sqrt{1-2p})$. (Voir dessins de Nielsen et Chuang).

Phase-flip :

$$
\begin{aligned}
\rho^{'} =& (1-p)\rho + pZ\rho Z \\
=& \frac{1-p}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}) + \frac{p}{2}(X^2 + Z\vec{N}\cdot\vec{\sigma}Z) \\
=& \frac{1}{2}I + \frac{1-2p}{2}n_x X + \frac{1-2p}{2}n_y Y + \frac{1}{2}n_z Z
\end{aligned}
$$

$$\vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N}' = ((1-2p)n_x, (1-2p)n_y, n_z)$$

On trouve que n_z est inchangé et le plan xy est contracté.

Phase & bit flip :

$$\rho^{'} = (1-p)\rho + pY\rho Y$$

On trouve après calculs similaires :

$$\vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N}' = ((1-2p)n_x, n_y, (1-2p)n_z)$$

Canal dépolarisant :

$$
\begin{aligned}
\rho^{'} =& (1-p)\rho + p\frac{I}{2} \\
=& \frac{1-p}{2}(I + \vec{N}\cdot\vec{\sigma}) + p\frac{I}{2} \\
=& \frac{I}{2} + \frac{1-p}{2}\vec{N}\cdot\vec{\sigma} \\
=& \frac{1}{2}(I + (1-p)\vec{N}\cdot\vec{\sigma})
\end{aligned}
$$

$$\text{Donc } \vec{N} = (n_x, n_y, n_z) \to \vec{N}' = ((1-p)n_x, (1-p)n_y, (1-p)n_z)$$

Le rayon de la sphère de Bloch est contracté de $\sqrt{1-p}$.

Exercice 3

a) Pour toutes matrices densités ρ :

$$\begin{aligned}\frac{\rho+X\rho X+Y\rho Y+Z\rho Z}{4} =&\frac{1}{4}\Big(\frac{I}{2}+\vec{N}\cdot\vec{\sigma}+X\frac{I}{2}X+X\vec{N}\cdot\vec{\sigma}X\\ &+Y\frac{I}{2}Y+Y\vec{N}\cdot\vec{\sigma}Y+Z\frac{I}{2}Z+Z\vec{N}\cdot\vec{\sigma}Z\Big)\\ =&\frac{1}{4}(2I+n_xX+n_yY+n_zZ+n_xX-n_yY-n_zZ\\ &-n_xX+n_yY-n_zZ-n_xX-n_yY+n_zZ)\\ =&\frac{I}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\rho) =&p\frac{I}{2}+(1-p)\rho\\ =&p\frac{\rho+X\rho X+Y\rho Y+Z\rho Z}{4}+(1-p)\rho\\ =&\left(1-\frac{3p}{4}\right)\rho+\frac{p}{4}(X\rho X+Y\rho Y+Z\rho Z)\end{aligned}$$

En changeant de parametrisation $p=\frac{4}{3}p^{'}$ on obtient

$$\mathcal{E}(\rho)=(1-p')\rho+\frac{p'}{3}(X\rho X+Y\rho Y+Z\rho Z).$$