Solution de la série 10
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Etats de mélange*

a) Pour la première source la matrice densité est :

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et pour la deuxième :

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} - \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} - \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right) \\
=& \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous voyons que la matrice densité peut correspondre à plusieures préparations physiques de la source.

b) Ici on a la matrice densité :

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}}\right) \\
=& \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right) \\
=& \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \\
=& \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

<u>Décomposition spectrale</u> : il faut calculer les valeurs propres et les vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \lambda v_1 \\ \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \left(\frac{3}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{16} = 0.$$

$$\Rightarrow (4\lambda)^2 - 4\lambda(3+1) + 3 - 1 = 0$$

$$(4\lambda)^2 - 4(4\lambda) + 2 = 0$$

$$4\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) v_1 \Rightarrow \text{si} \quad v_1 = 1 \quad \text{on a} \quad v_2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{correspond à} \quad \lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) v_1 \Rightarrow \text{si} \quad v_1 = 1 \quad \text{on a} \quad v_2 = -1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{correspond à} \quad \lambda_- = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

<u>Normalisons les vecteurs</u> :

$$\lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{correspond à} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - 1)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} = |v_+\rangle$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{correspond à} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \sqrt{2})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = |v_-\rangle$$

En notation de Dirac

$$\rho = \lambda_+ |v_+\rangle\langle v_+| + \lambda_- |v_-\rangle\langle v_-|$$

Exercice 2 *Sphère de Bloch*

a)

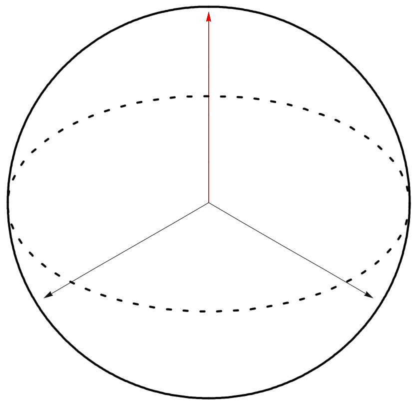
$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + \vec{N} \cdot \vec{\sigma}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + N_x^2 X^2 + N_y^2 Y^2 + N_z^2 Z^2\right) \\ &+ \frac{1}{4}N_x N_y (XY + YX) + \frac{1}{4}N_x N_z (XZ + ZX) + \frac{1}{4}N_y N_z (YZ + ZY) \\ &+ \frac{1}{4}2\vec{N} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

Les carrés des matrices de Pauli sont égaux à la matrice unité et ils anticommutent, donc

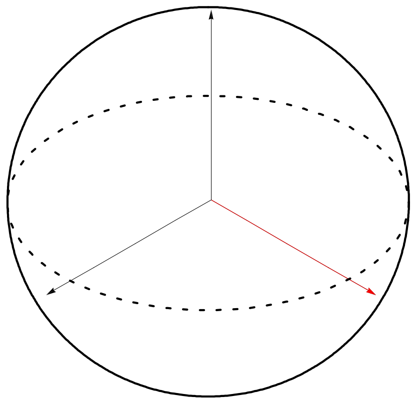
$$\rho^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + \left\|\vec{N}\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\vec{N}\cdot\vec{\sigma}$$

qui est égal à ρ si $\left\|\vec{N}\right\| = 1$.

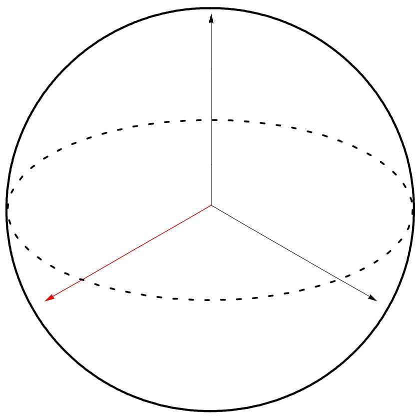
b) Pour $\vec{N} = (0, 0, +1)$:



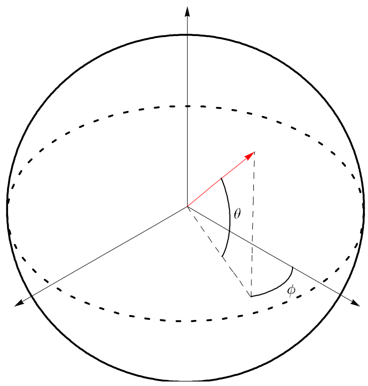
Pour $\vec{N} = (0, +1, 0)$:



Pour $\vec{N} = (+1, 0, 0)$:



Pour $\vec{N} = (\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, \sin\theta)$:



c) Pour $\vec{N} = (0,0,0)$ $\rho = \frac{1}{2}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (0,0,+1)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (0,0,+1)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \sigma_z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (0,+1,0)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (0,-1,0)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \sigma_y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (+1,0,0)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \sigma_x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (-1,0,0)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \sigma_x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, \sin\theta)$
$\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \cos\theta\sin\varphi\sigma_x + \cos\theta\cos\varphi\sigma_y + \sin\theta\sigma_z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sin\theta & -i\cos\theta e^{i\varphi} \\ i\cos\theta e^{-i\varphi} & 1-\sin\theta \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (0,0,+\alpha)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \alpha\sigma_z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N} = (0,0,-\alpha)$ $\rho = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \alpha\sigma_z) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$.

Pour avoir un état pur il faut avoir $\left\|\vec{N}\right\| = 1$.
Donc les numeros 2,3,4,5 sont des états purs. Le Ket correspondant est :

$$|0\rangle \quad \text{et} \quad |1\rangle \quad \text{pour} \quad (0,0,\pm1)$$

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{pour} \quad (\pm1,0,0)$$

$$\frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{i|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{pour} \quad (0,\pm1,0)$$

$$e^{i\varphi/2}\cos\theta|0\rangle \quad \text{et} \quad e^{-i\varphi/2}\sin\theta|1\rangle \quad \text{pour} \quad (\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, \sin\theta)$$

Exercice 3 *Intrication de Matrices densité réduites*

a)

$$|\psi_{_{tot}}\rangle = |\varphi\rangle_1 \otimes \frac{(|\uparrow\uparrow\rangle_{23} + |\downarrow\downarrow\rangle_{23})}{\sqrt{2}}$$

$$\rho_{tot} = |\psi_{_{tot}}\rangle\langle\psi_{_{tot}}| = |\varphi\rangle_1\langle\varphi|_1 \otimes \frac{1}{2}\left\{|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|\right\}_{23}$$

On trace sur Bob et il reste :

$$\rho_{Al} = \mathrm{Tr}_3\,\rho_{tot} = |\varphi\rangle_1\langle\varphi|_1 \otimes \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle_2\langle\uparrow|_2 + |\downarrow\rangle_2\langle\downarrow|_2\right)$$

Alice possède $|\varphi\rangle_1\langle\varphi|_1 \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_2$.

Puis on trace sur Alice et il reste :

$$\rho_{Bob} = \mathrm{Tr}_{12}\,\rho_{tot} = \underbrace{\langle\varphi|\varphi\rangle_1}_{1} \cdot \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle_3\langle\uparrow|_3 + |\downarrow\rangle_3\langle\downarrow|_3\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_3$$

Bob possède un état de mélange completement désordonné.

b) Si Alice applique U_{12} dans son labo, la matrice densité totale devient :

$$(U_{12} \otimes \mathbb{I}_3)\rho_{tot}(U_{12}^{+} \otimes \mathbb{I}_3) = \rho_{tot}^{'}.$$

Bob lui possède l'état

$$\begin{aligned}
\rho_{Bob}^{'} &= \mathrm{Tr}_{12}\,\rho_{tot}^{'} \\
&= \mathrm{Tr}_{12}(U_{12}\rho_{tot}U_{12}^{+}) \\
&= \mathrm{Tr}_{12}(U_{12}^{+}U_{12})\rho_{tot} && \text{(cyclicité)} \\
&= \mathrm{Tr}_{12}\,\rho_{tot} && \text{(unitarité)} \\
&= \rho_{Bob} && \text{(calculé auparavant)} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}_3.
\end{aligned}$$

Bob ne peut pas détecter l'opération d'Alice.

c) Maintenant Alice fait une mesure de base $P_{12}^{(n)}; n = 1, 2, 3, 4$. Le nouvel état est :

$$\frac{P_{12}^{(n)}U_{12}\rho_{tot}U_{12}^{+}P_{12}^{(n)}}{\mathrm{Tr}\,P_{12}^{(n)}U_{12}\rho_{tot}U_{12}^{+}P_{12}^{(n)}} = \rho_{tot}^{(n)}$$

avec $\text{prob}(n) = \text{Tr}\, P_{12}^{(n)} U_{12} \rho_{tot} U_{12}^{+} P_{12}^{(n)}$.
Puisque le résultat de la mesure (ce résultat est n) est connu seulement d'Alice (en admettant qu'elle ne le transmet pas à Bob), pour Bob la nouvelle matrice densité est donnée par :

$$
\begin{aligned}
\rho''_{Bob} &= \sum_n \text{prob}(n)\, \text{Tr}_{12}\, \rho_{tot}^{n} \\
&= \sum_n \text{prob}(n) \frac{\text{Tr}_{12}\, P_{12}^{(n)} U_{12} \rho_{tot} U_{12}^{+} P_{12}^{(n)}}{\text{prob}(n)} \\
&= \sum_n \text{Tr}_{12}\, P_{12}^{(n)} (U_{12} \rho_{tot} U_{12}^{+}) P_{12}^{(n)}
\end{aligned}
$$

Utilisant la cyclicité de la trace, $\left(P_{12}^{(n)}\right)^2 = P_{12}^{(n)}$ et $\sum_{n=1}^{4} P_{12}^{(n)} = \mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2$ on trouve $\rho''_{Bob} = \rho'_{Bob} = \rho_{Bob}$.

d) Ainsi tant qu'il n'y a pas de communication entre Alice et Bob, Bob ne peut pas détecter la présence d'Alice et ne peut pas détecter ses opérations qu'elles soient unitaires ou qu'elles soient des mesures. C'est pour cela que dans le protocol de téléportation il y a une phase de communication classique entre Alice et Bob. [Cette phase de communication ne peut pas s'opérer à vitesse plus grande que celle de la lumière]. Les états intriqués peuvent aider ou assister à la communication entre Alice et Bob mais ils ne peuvent servir eux-mêmes à transporter l'information.