Série 10
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Etats de mélange*

a) Montrer que les états de mélange de deux sources

$$\left\{ |0\rangle, \frac{1}{2}; |1\rangle, \frac{1}{2} \right\}$$

et

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle \right), \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle - |1\rangle \right), \frac{1}{2} \right\}$$

correspondent à la même matrice densité.

b) Pour une source dans l'état de mélange

$$\left\{ |0\rangle, \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + |1\rangle \right), \frac{1}{2} \right\}$$

donnez la matrice densité et sa décomposition spectrale.

Exercice 2 *Sphère de Bloch*

Nous avons vu au cours que toute matrice densité pour 1 qubit peut s'écrire

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} + \vec{N} \cdot \vec{\sigma} \right) \text{ avec } \left\| \vec{N} \right\| < 1.$$

et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ les trois matrices de Pauli.

a) Montrez que si $\left\| \vec{N} \right\| = 1$ alors $\rho^2 = \rho$.

Remarque : Cela signifie que ρ est un projecteur donc qu'il existe $|\psi\rangle$ tel que $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$.

b) Représentez les vecteurs suivants de la sphère (ou boule) de Bloch :

$$\vec{N} = (0, 0, 0)\,; (0, 0, \pm 1)\,; (0, \pm 1, 0) \text{ et } (\pm 1, 0, 0)$$
$$\vec{N} = (\cos\theta \sin\varphi, \cos\theta \cos\varphi, \sin\theta)$$
$$\vec{N} = (0, 0, \pm\alpha)\,; 0 < \alpha < 1.$$

c) Pour chacun de ces vecteurs calculez ρ. Pour lesquels de ces vecteurs ρ est-il un état pur ?

Quand ρ est un état pur donnez le Ket correspondant de l'espace de Hilbert.

Exercice 3 *Intrication de Matrices densité réduites*

Dans cet exercice nous montrons qu'un état intriqué ne permet pas à lui seul de transmettre de l'information.

Supposons qu'Alice (sur Terre) possède deux particules 1 et 2 et Bob (sur la Lune) possède une troisième particule 3. Nous supposons que les particules 2 et 3 sont intriquées (un astronaute dans une fusée les a produites puis distribuées à Alice et Bob).

Ici nous supposons encore que ces particules ont un moment magnétique (spin 1/2) et que l'état total du système (non-local) 123 est

$$|\psi_{tot}\rangle = |\varphi\rangle_1 \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\uparrow\rangle_{23} + |\downarrow\downarrow\rangle_{23}\right)$$

a) Calculez la matrice densité réduite d'Alice (en traçant sur les degrés de liberté de Bob) puis la matrice densité de Bob (en traçant sur les degrés de liberté d'Alice).

b) Supposons maintenant qu'Alice fasse des expériences locales dans son laboratoire terrestre. La première expérience consiste à appliquer un opérateur unitaire

$$U_{12}$$

sur les particules 1 et 2. On suppose que Bob lui ne fait rien, donc l'opérateur unitaire total s'appliquant sur le système 123 est $U_{12} \otimes \mathbf{1}_3$.

Calculez la matrice densité réduite de Bob. Peut-il savoir ce qu'Alice fait dans son labo ? Peut-il même savoir qu'elle a fait ou non une opération ?

c) Maintenant Alice applique U_{12} dans son labo suivi d'une mesure correspondant à une base de projecteurs $\left\{P_{12}^{(n)}; n = 1, 2, 3, 4\right\}$. Calculez à nouveau la matrice densité de Bob. Est-ce que Bob peut avoir la moindre information sur les opérations d'Alice ?

d) Quelle est la morale de cet exercice ?