Solution de l'examen
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Refocusing*

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}}|\psi_0\rangle &= e^{-itJ\sigma_1^z\otimes\sigma_2^z}\cdot\frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-itJ}|\uparrow\uparrow\rangle - e^{itJ}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{itJ}|\downarrow\uparrow\rangle - e^{-itJ}|\downarrow\downarrow\rangle\right)\\
&= \frac{e^{-itJ}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - e^{2itJ}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{2itJ}|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)
\end{aligned}
$$

1. Pour $t = \frac{\pi}{4J}$ on a $e^{2itJ} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$
   $\Rightarrow |\psi_\tau\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$.
2. Supposons que l'état puisse s'écrire
   $(\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle)\otimes(\gamma\,|\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\rangle) = \alpha\gamma\,|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha\delta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \beta\gamma\,|\downarrow\uparrow\rangle + \beta\delta\,|\downarrow\downarrow\rangle$,
   alors $\alpha\gamma = 1,\ \alpha\delta = -i,\ \beta\gamma = i,\ \beta\delta = -1$.
   On peut toujours poser $\alpha = 1$ (phase globale). Donc $\gamma = 1,\ \delta = -i,\ \beta = i$ et $\delta = i \Rightarrow$ contradiction sur δ.
   Pour $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{8J}$ on a $e^{2itJ} = e^{\frac{i\pi}{4}}$.
   $|\psi_{\tau/2}\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\uparrow\downarrow\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$.
   $(R_1\otimes\mathbb{I}_2)\,|\psi_{\tau/2}\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{2}\left(|\downarrow\uparrow\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\downarrow\downarrow\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right)$
   on laisse evoluer pendant $\tau/2$ à nouveau
   $\rightarrow \frac{1}{2}\left(|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right)$
   Après une dernière rotation $\rightarrow \frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$.
   On remarque que
   $U_{tot}\,|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)\otimes(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)\,|\psi_0\rangle\,!$
   $$(R_1\otimes\mathbb{I}_2) = \sigma_1^x\otimes\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$
   $$e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}} = e^{-itJ\sigma_1^z\otimes\sigma_2^z} = \begin{pmatrix}e^{-itJ}&0&0&0\\0&e^{itJ}&0&0\\0&0&e^{itJ}&0\\0&0&0&e^{-itJ}\end{pmatrix}$$
   Faire la multiplication des matrices.

3. **Bonus** : $J << 1$. Donc $\tau = \frac{\pi}{4J} >> \pi$. Les π-pulses sont beaucoup plus rapides que l'évolution des spins nucleaires. L'idée est que en injectant deux π-pulses aux instants $\frac{\tau}{2}$ et τ on reforme l'état initial et donc tout se passe comme si les deux spins n'avaient pas évolué.

Exercice 2 *Effet de la décohérence dans l'algorithme de Shor*

1. Après les portes de Hadamard :

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}_0 \otimes \widetilde{H}_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\
&\qquad = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (|0\rangle + e^{i\varphi_0}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + e^{i\varphi_0}|10\rangle + e^{i\varphi_1}|01\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|11\rangle) \otimes |00\rangle \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |0\rangle
\end{aligned}$$

Après U_f on obtient l'état :

$$\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle \otimes |f(0)\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle \otimes |f(1)\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle \otimes |f(2)\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle \otimes |f(3)\rangle)$$

Puisque $f(x) = f(x+2)$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle) \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}(e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |f(1)\rangle$$

Appliquons la QFT à chaque terme :

$$\frac{1}{4}\sum_{y=0}^{3}(1 + e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}2y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4}\sum_{y=0}^{3}(e^{i(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{\pi}{2}3y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle$$

L'état juste après la mesure est :

$$|\psi_{post}\rangle = \frac{1}{4}(1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4}e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)}(1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle.$$

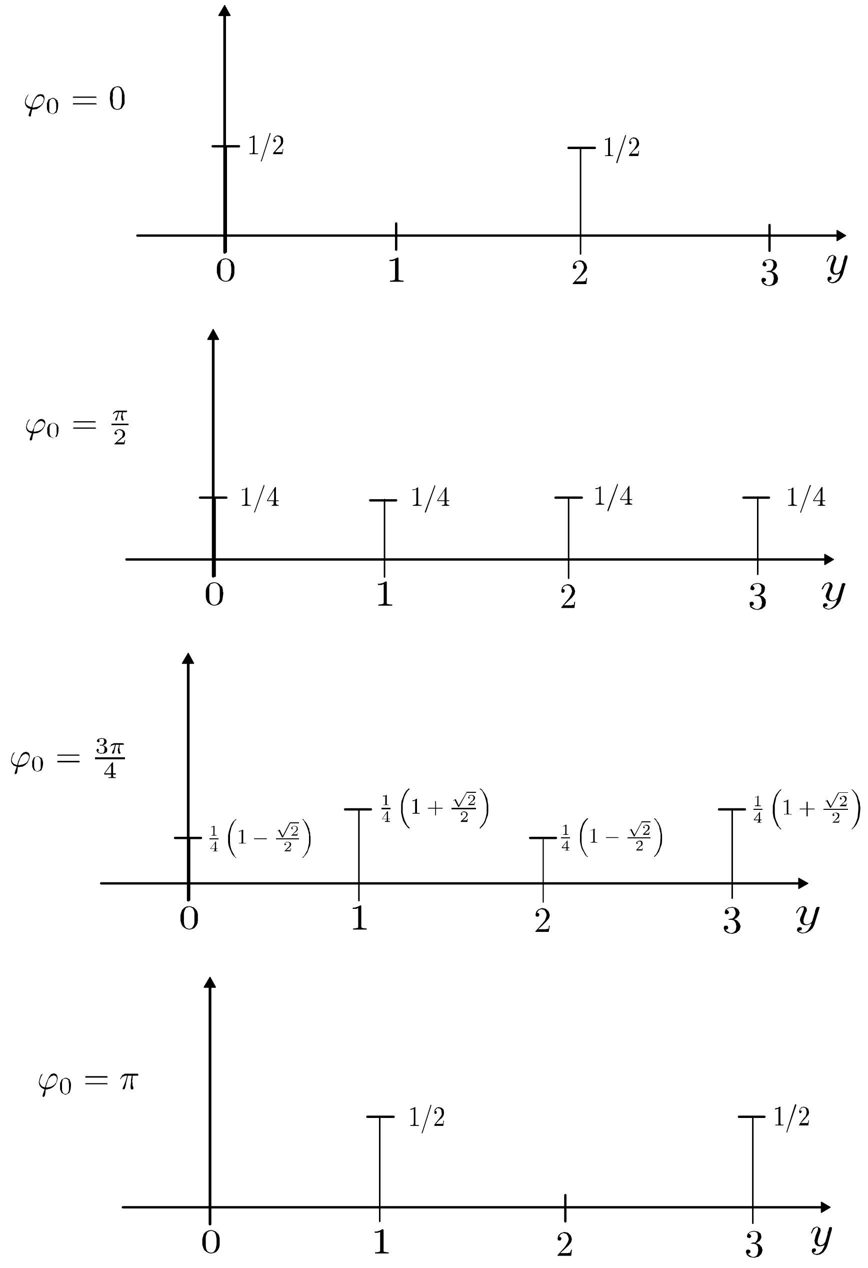
La probabilité de l'obtenir est donné par sa norme (au carré)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}(y|\varphi_0, \varphi_1) &= \frac{1}{16}\left\{|1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)}|^2 + |1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)}|^2\right\} \\
&= \frac{1}{8}\left((1 + \cos(\varphi_0 + \pi y))^2 + \sin^2(\varphi_0 + \pi y)\right)
\end{aligned}$$

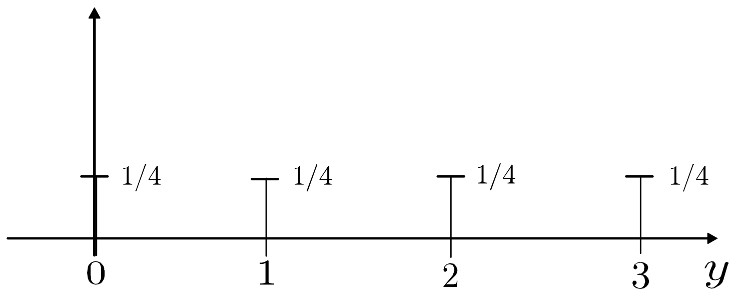
$\Rightarrow$

$$\mathrm{Prob}(y|\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{4}\left(1 + \cos(\varphi_0 + \pi y)\right)$$

On voit que curieusement cette probabilité ne depend pas de φ_1. Donc l'algorithme de Shor a l'air robuste par rapport à ce déphasage.



$$\mathrm{Prob}(y) = \int \mathrm{d}\varphi_0 \, \mathrm{Prob}(y|\varphi_0) \, \mathrm{Prob}(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{2\pi} \, \mathrm{Prob}(y|\varphi_0) = \frac{1}{4}$$



2. **Bonus** : Dans une expérience de RMN on obtient ces spectres. Dans les cas où $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ et π on peut lire la période.

Exercice 3 *Variation sur le problème de Simon*

1. On a $(0, \vec{x}') + (0, \vec{x}'') = (0, \vec{x}' + \vec{x}'') \in H$ et $(0, 0, ..., 0) \in H$. Les deux propriétés entrainent que H est un sous-groupe de $\mathbb{F}_3^n$. La cordinalité est $|H| = 3^{n-1}$. D'après le théorème de Lagrange il y a $|\mathbb{F}_3^n/H| = \frac{|\mathbb{F}_3^n|}{|H|} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3$ classes d'équivalence.

$$U_f \left|\psi_{in}\right\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{x})\rangle.$$

Puisque f est constante sur les classes d'équivalence on peut écrire

$$\mathbb{F}_3^n = \{\vec{a} + \vec{x}, \vec{x} \in H\} U \{\vec{b} + \vec{x}, \vec{x} \in H\} U \{\vec{c} + \vec{x}, \vec{x} \in H\}$$

$$\begin{aligned} U_f \left|\psi_{in}\right\rangle &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \{|\vec{a} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{a})\rangle + |\vec{b} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{b})\rangle + |\vec{c} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{c})\rangle\} \\ &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \{|\vec{a} + \vec{x}\rangle \otimes |0\rangle + |\vec{b} + \vec{x}\rangle \otimes |1\rangle + |\vec{c} + \vec{x}\rangle \otimes |2\rangle\} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} (F \otimes \mathbb{I})\, U_f \left|\psi_{in}\right\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \sum_{\vec{y} \in \mathbb{F}_3^n} & e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{a}+\vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle \\ & + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{b}+\vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{c}+\vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \end{aligned}$$

Grâce à l'indication :

$$\begin{aligned} (F \otimes \mathbb{I})\, U_f \left|\psi_{in}\right\rangle &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{y} \in H^{\perp}} e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{y} \in H^{\perp}} |\vec{y}\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |2\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{y_1 = 0,1,2} |y_1, 0, ..., 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |2\rangle \right\} \\ &\equiv |\psi_{fin}\rangle \end{aligned}$$

D'après le postulat de la mesure, après la mesure l'état devient (0 si $\vec{y} \neq (y_1, 0, ..., 0)$)
$(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{3}|y_1, 0, ..., 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle \right\}$
et donc :

$$\begin{aligned}
\langle\psi_{fin}| \mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I}|\psi_{fin}\rangle &= \langle\psi_{fin}|(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})|\psi_{fin}\rangle \\
&= \frac{1}{9} \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle \right\}^* \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Quand on fait une mesure on obtient
$(0, 0, ..., 0)$ ou $(1, 0, ..., 0)$ ou $(2, 0, ..., 0)$
avec probabilité $1/3$. Si on obtient $(1, 0, ..., 0)$ ou $(2, 0, ..., 0)$ on connait $H^\perp$ (puisque l'on sait que sa dimension est 1). Une fois $H^\perp$ connu on connait H. La probabilité d'échec lors d'une mesure est donc $1/3$ (événement $(0, 0, ..., 0)$).

$$\text{Prob(succès avec T mesures)} = 1 - \text{Prob(échec T fois)} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^T = 1 - \epsilon.$$

$\Rightarrow \quad \epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{|\ln \epsilon|}{\ln 3}.$

2. *Question Bonus* :
   – Si $\vec{y} \in H^\perp = \{\vec{y} \mid \vec{y} \cdot \vec{x} = 0 \ \forall \vec{x} \in H\}$ on a bien sûr

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \sum_{\vec{x} \in H} 1 = |H| = 3^{n-1}.$$

   – Si $\vec{y} \notin H^\perp$ alors $\exists \vec{x}_0 \in H$ t.q. $\vec{y} \cdot \vec{x}_0 \neq 0$ c.à.d $= j \mod 3$, $j = 1$ ou 2.

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right),$$

   car H est un groupe et donc invariant par $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_0$

$$\Rightarrow \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right)\right) \left(1 - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right)\right) = 0$$

   Puisque $\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right)$ est $e^{\frac{2\pi i}{2}} \neq 1$ ou $e^{\frac{4\pi i}{2}} \neq 1$,

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = 0.$$