Examen Intermdiaire
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Refocusing*

On considère deux spins $\frac{1}{2}$ nucléaires avec Hamiltonien d'interaction $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. L'opérateur d'évolution de ce système est $U = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right)$.

Soit
$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$
l'état initial des deux spins.

1. Montrez que l'état après un temps $\tau = \frac{\pi}{4J}$ est
$$|\psi_\tau\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

2. Montrez que cet état est intriqué, c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme $(\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle) \otimes (\gamma\,|\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\rangle)$.

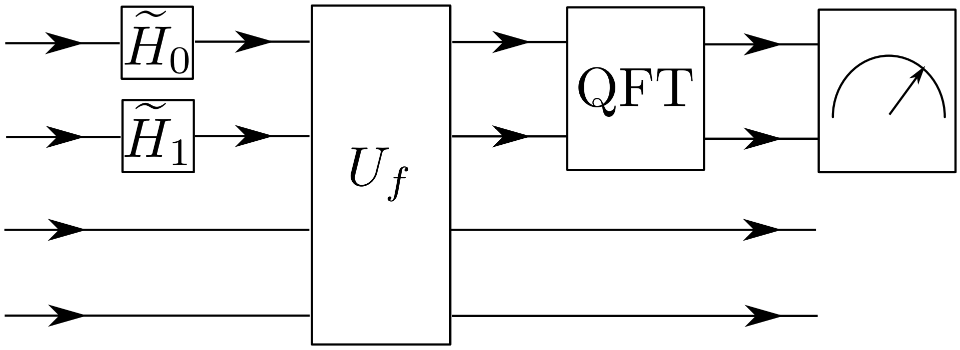
3. Soit $R_1 = i\exp\left(-i\pi\frac{\sigma_1^x}{2}\right) = \sigma_1^x$, le π-pulse (ou bien rotation autour de x) agissant sur le premier spin. On considère l'évolution des deux spins pendant un temps $\frac{\tau}{2}$, suivi d'un π-pulse, suivi de l'évolution pendant un temps $\frac{\tau}{2}$, et suivi à nouveau d'un π-pulse. L'évolution totale est
$$U_{tot} = (R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-i\frac{\tau}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}\,(R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-i\frac{\tau}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}$$
Calculez $U_{tot}\,|\psi_0\rangle$: que remarquez-vous ?

4. Montrez maintenant l'identité générale valable pour tout t :
$$(R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}}\,(R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}} = \mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2$$
Conseil : travaillez de façon matricielle.

5. **Bonus** : En pratique $J << 1$. Cela entraîne une interprétation physique de cette identité. Pouvez-vous en dire quelques mots ?

Exercice 2 *Effet de la décohérence dans l'algorithme de Shor*

On considère une fonction sur $\mathbb{Z}$, de période égale à 2. C'est à dire $f(x) = f(x+2)$, $x \in \mathbb{Z}$. Nous voulons étudier le circuit suivant :



où les portes de Hadamard usuelles sont modifiées par une perturbation aléatoire

$$\widetilde{H}_0 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_0} |1\rangle \right), \text{ où } b = 0, 1$$

$$\widetilde{H}_1 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_1} |1\rangle \right), \text{ où } b = 0, 1$$

avec φ_0 et φ_1 uniformément distribués sur $[0, 2\pi]$.

Le circuit est initialisé dans l'état $|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$. On prendra la convention $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle$; $|0\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle$; $|1\rangle \otimes |0\rangle = |2\rangle$; $|1\rangle \otimes |1\rangle = |3\rangle$ et les définitions pour $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$U_f |x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y + f(x)\rangle$$

$$\text{QFT} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{y=0}^{3} \exp\left(\frac{2\pi i}{4} xy \right) |y\rangle$$

1. Montrez que l'état après les portes de type Hadamard est :

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(|0\rangle + e^{i\varphi_1} |1\rangle + e^{i\varphi_0} |2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)} |3\rangle \right) \otimes |0\rangle$$

2. Montrez que l'état juste avant la mesure est

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{4} \sum_{y=0}^{3} \left(1 + e^{i(\varphi_0 + \pi y)} \right) |y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \left(e^{i\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} y\right)} + e^{i\left(\varphi_0 + \varphi_1 + \frac{3\pi}{2} y\right)} \right) |y\rangle \otimes |f(1)\rangle$$

3. On mesure les deux premiers qu-bit dans la base définie par les projecteurs

$$\{ P_y \otimes \mathbb{I}_{4\times 4} = |y\rangle \langle y| \otimes \mathbb{I}_{4\times 4};\ y = 0, 1, 2, 3 \}$$

   Calculez l'état juste après la mesure (a un facteur de normalisation près). Ensuite calculez la probabilité d'obtenir y. Vous devrez trouver un résultat indépendant de φ_1 .

4. Dans la question précédente vous avez calculé une probabilité étant donné φ_0 et φ_1 fixés. En principe vous avez trouvé un résultat dépendant uniquement de φ_0. Faire un dessin de $\Pr(y|\varphi_0)$ pour $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. Calculez et dessinez la probabilité totale $\Pr(y)$ en considérant que φ_0 est distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$.

5. **Bonus** : Dans une expérience de RMN (imaginaire) quels sont les cas dans la question 4 ci-dessus qui permettent d'obtenir la période de f ?

Exercice 3 *Variation sur le problème de Simon*

Un qu-trit est un système quantique à 3 niveaux d'énergie. Les 3 états de base correspondants sont notés $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Un état général appartient à l'espace d'Hilbert $\mathbb{C}^3$,

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle + \gamma\,|2\rangle$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Soit $\mathbb{F}_3^n$ l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ à n composantes avec chaque composante prise $\bmod 3$. Le corps de l'espace vectoriel est $\mathbb{F}_3$ (entiers avec $+$ et $\times$ $\bmod 3$). Soit H le sous-espace vectoriel

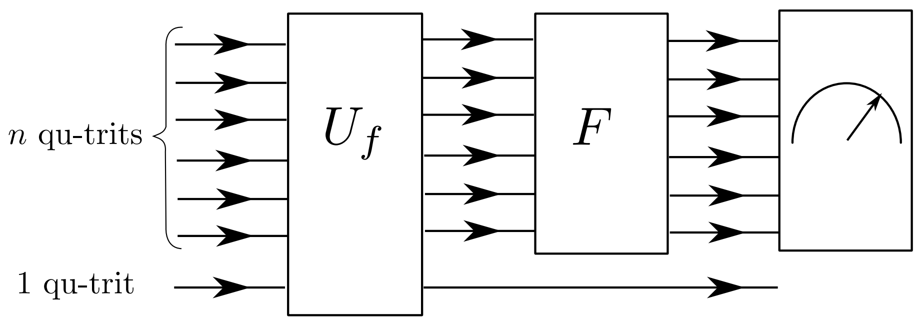
$$H = \left\{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n \middle|\ \vec{x} = (0, \vec{x}') \text{ avec } \vec{x}' \in \mathbb{F}_3^{n-1}\right\}.$$

On se donne une fonction telle que

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{F}_3^n \to \{0,1,2\} \\ & \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) \end{aligned}$$

avec $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ si et seulement si $\vec{x} - \vec{y} \in H$.

On considère le circuit quantique suivant :



- L'état d'entrée est initialisé à :

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |0\rangle$$

- La porte U_f (unitaire) est définie par

$$U_f\,|\vec{x}\rangle \otimes |y\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |y + f(\vec{x})\rangle \text{ avec } y = 0,1,2$$

  Ici $y + f(\vec{x})$ est calculé $\bmod 3$.
- La porte F est une version de la transformée de Fourier quantique

$$F\,|\vec{x}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{y} \in \mathbb{F}_3^n} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) |\vec{y}\rangle$$

  où $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \bmod 3$.

1. Montrez que H est un sous-groupe de $\mathbb{F}_3^n$ pour l'addition $\bmod 3$. Donnez sa cardinalité. Montrez qu'il y a 3 classes d'équivalence de H dans $\mathbb{F}_3^n$ et donnez leur cardinalité.

2. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des représentants des 3 classes d'équivalence avec $f(\vec{a}) = 0$, $f(\vec{b}) = 1$, $f(\vec{c}) = 2$. Montrez que l'état juste après la porte U_f est

$$U_f \left|\psi_{in}\right\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \left\{ \left|\vec{a}+\vec{x}\right\rangle \otimes |0\rangle + \left|\vec{b}+\vec{x}\right\rangle \otimes |1\rangle + \left|\vec{c}+\vec{x}\right\rangle \otimes |2\rangle \right\}$$

3. Montrez que l'état juste après la porte F peut s'écrire :

$$(F \otimes \mathbb{I})\, U_f \left|\psi_{in}\right\rangle = \frac{1}{3} \sum_{y_1=0,1,2} |y_1, 0, ..., 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 a_1} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 b_1} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 c_1} |2\rangle \right\}$$

Indication : utilisez la formule

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \begin{cases} 3^{n-1} & \text{si } \vec{y} \in H^{\perp} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Bonus : prouvez cette formule pour avoir un bonus sur l'exercice.

4. Appliquez le postulat de la mesure sur les n premiers qu-trits et montrez que

$$\Pr(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \vec{y} = (y_1, 0, ..., 0) \text{ avec } y_1 = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. En admettant que H est un sous-groupe caché de dimension connue $n-1$, combien de mesures faut-il faire pour reconstruire H avec une probabilité de succès égale à $1-\varepsilon$ (ε très petit) ?