Chapitre 9

Bruit - Décohérence et canaux en MQ

Dans ce chapitre nous étudions comment modéliser les effets des perturbations de l'environnement sur un système. Ces perturbations sont ce que l'on nomme communément *"bruit"*. Pour le calcul quantique, leur effet le plus important est la décohérence induite sur les états quantiques du système. Pour introduire ces notions nous avons besoin du formalisme de la matrice densité exposé ci-dessous.

9.1 Formalisme de la matrice Densité

Jusqu'à maintenant nous avons décrit les états d'un système (isolé) par les vecteurs (kets) de l'espace d'Hilbert. Si $|\psi\rangle$ est un état et A une observable, avec $A = \sum_n \alpha_n |n\rangle\langle n| = \sum_n \alpha_n P_n$ pour sa décomposition spectrale, le postulat de la mesure nous dit que la probabilité d'obtenir $|n\rangle$ ou α_n comme résultat de la mesure est

$$\begin{aligned} & \text{Prob}(n) = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \langle\psi|P_n|\psi\rangle \\ \text{et} \qquad & \langle A\rangle = \sum_n \alpha_n \langle\psi|P_n|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_n \alpha_n P_n|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle \end{aligned}$$

Ces formules peuvent se réécrire en introduisant la notion de *"Trace d'une matrice"* :

$$\text{Prob}(n) = \text{Tr}\,(P_n|\psi\rangle\langle\psi|) \qquad \text{et } \langle A\rangle = \text{Tr}\,(A|\psi\rangle\langle\psi|)$$

Rappel de Math :

$$\text{Tr } A = \sum_i a_{ii} \qquad \text{Définition}$$

$$\text{Tr } (\alpha A + \beta B) = \alpha \text{ Tr } A + \beta \text{ Tr } B \qquad \text{Linéarité}$$

$$\text{Tr } AB = \text{Tr } BA \qquad \text{Cyclicité}$$

Notez que la cyclicité entraine l'invariance de la trace lors des changements de base (p. ex sans les transformations unitaires). *Cela à pour conséquence que la trace d'une matrice hermitienne est aussi donnée par la somme de ses valeurs propres (en comptant la multiplicité).*

Ainsi le système dans l'état $|\psi\rangle$ peut aussi bien être décrit par la matrice $|\psi\rangle\langle\psi|$ (qui ici est un projecteur). Ce point de vue a l'avantage de se prêter à la généralisation suivante. Considérons une source émettant des atomes (ou qubits) dans des états purs

$$|\varphi_1\rangle; |\varphi_2\rangle \ldots; |\varphi_k\rangle \ldots$$

avec probabilités classiques (fraction d'atomes émis dans l'état $|\varphi_k\rangle$)

$$q_1; q_2 \ldots q_k; \ldots$$

Faisons une mesure de l'observable A pour un atome émis par la source. Si l'atome est dans l'état $|\varphi_k\rangle$ la probabilité d'observer $|n\rangle$ est $|\langle n|\varphi_k\rangle|^2$. Donc

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(n) &= \sum_k \text{Prob}(k \text{ soit émis}) \text{ Prob}(\text{obs } n|k \text{ est émis}) \\
&= \sum_k q_k |\langle n|\varphi_k\rangle|^2 \\
&= \sum_k q_k \text{ Tr } |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| P_n \\
&= \text{Tr } (\sum_k q_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|) P_n
\end{aligned}$$

De plus

$$\langle A\rangle = \sum_n \alpha_n \text{Prob}(n) = \text{Tr } (\sum_k q_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|) A$$

la seconde égalité provenant de la décomposition spectrale. Il est alors naturel d'introduire la quantité

$$\varrho = \sum_k q_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

appelée *"matrice densité"*. Puisque $0 \leq q_k \leq 1$ et $\sum_k q_k = 1$, il s'agit d'une combinaison convexe de projecteurs. Cette matrice densité décrit entièrement la source. La mesure d'une observable donne

$$\begin{aligned} \text{Prob}(n) &= \text{Tr } \varrho P_n = \text{Tr } P_n \varrho \\ \text{et} \qquad \langle A \rangle &= \text{Tr } \varrho A = \text{Tr } A \varrho \end{aligned}$$

Propriétés d'une matrice densité

1) La matrice ϱ est hermitienne car

$$\varrho^+ = \sum_k \bar{q_k} (|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|)^+ = \sum_k q_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

2) La matrice ϱ est semi-définie positive car $\forall\ |v\rangle \in \mathscr{H}$

$$\begin{aligned} \langle v|\varrho|v\rangle &= \sum_k q_k \langle v|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|v\rangle \\ &= \sum_k q_k |\langle v|\varphi_k\rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

3) Sa trace vaut 1 car

$$\begin{aligned} \text{Tr } \varrho = \sum_k q_k \text{ Tr } |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| &= \sum_k q_k \text{ Tr } \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle \\ &= \sum_k q_k \langle\varphi_k|\varphi_k\rangle \\ &= \sum_k q_k = 1 \end{aligned}$$

Nous adoptons maintenant le point de vue suivant, du à Von Neumann :

L'état le plus général d'un système quantique est donné par une matrice densité ϱ. Une matrice densité est une matrice $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ qui satisfait les trois propriétés ci-dessus (hermitienne, positive et de trace unité). Toute matrice densité est une combinaison convexe de projecteurs (pour le voir il suffit de considérer la décomposition spectrale). Néanmoins il faut garder à l'esprit que cette décomposition n'est pas unique.

Evolution unitaire
Puisque chaque état $|\varphi_k\rangle$ évolue comme $|\varphi_k(t)\rangle = U_t|\varphi_k(0)\rangle$ la matrice densité évolue comme :

$$\begin{aligned}\varrho(t) &= \sum_k q_k U_t|\varphi_k(0)\rangle\langle\varphi_k(0)|U_t \\ &= U_t\varrho(0)U_t\end{aligned}$$

Postulat de la mesure
Si l'état est $|\varphi_k\rangle$ (ceci a lieu avec prob q_k) la mesure projette sur $|n\rangle$ qui correspond à la matrice densité $|n\rangle\langle n| = P_n$. Donc après la mesure la matrice densité sera

$$\varrho_{\text{après}} = \sum_k q_k|n\rangle\langle n| = |n\rangle\langle n|$$

Cette formule peut aussi s'écrire

$$\varrho_{\text{après}} = \frac{P_n\varrho P_n}{\text{Tr }(P_n\varrho)} \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned}&\text{En effet} \qquad P_n\varrho P_n = |n\rangle\langle n|\varrho|n\rangle\langle n| \text{ et} \\ &\text{Tr }(P_n\varrho) = \text{Tr }|n\rangle\langle n|\varrho = \text{Tr }\langle n|\varrho|n\rangle = \langle n|\varrho|n\rangle.\end{aligned}$$

L'avantage de (9.1) est qu'elle est encore valable si P_n est de dimension supérieure à 1. Ainsi le postulat de la mesure est inchangé : une mesure projette l'état sur un vecteur de base de l'appareil de mesure

$$\begin{aligned}&\varrho_{\text{après}} = |n\rangle\langle n| = \frac{P_n\varrho P_n}{\text{Tr }P_n\varrho} \\ &\text{avec Prob}(n) = \text{Tr }P_n\varrho\end{aligned}$$

Exemple : source thermique
Prenons des spins dans un champ magnétique $\vec{B_0} \mathbin{/\!\!/} z$ à l'équilibre thermique à température T. Chaque spin possède deux états d'énergie $E_\uparrow = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$ et $E_\downarrow = +\frac{\hbar\omega_0}{2}$. D'après la loi de Maxwell-Boltzmann-Gibbs :

$$\text{Prob}(\uparrow) = \frac{\exp-(E_\uparrow/k_BT)}{Z}, \qquad \text{Prob}(\downarrow) = \frac{\exp-(E_\downarrow/k_BT)}{Z}$$

où k_B est la constante de Boltzmann (k_BT à l'unité d'une énergie et T celle d'une température) et Z est un facteur qui sert à normaliser les probabilités :

$$Z = \exp(-\frac{E_\uparrow}{k_BT}) + \exp(-\frac{E_\downarrow}{k_BT}) = 2\cosh(\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT})$$

L'état thermique est décrit par la matrice densité

$$\varrho_{\text{therm}} = \frac{1}{2\cosh(\frac{\hbar\omega_0}{2K_BT})}\left(e^{\frac{\hbar\omega_0}{2K_BT}}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + e^{-\frac{\hbar\omega_0}{2K_BT}}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right)$$

Si on applique un champ de RF (comme dans les expériences de RMN) on peut calculer l'évolution temporelle de cet état $U(t)\varrho U(t)^+$ et à partir de l'évolution des proportions de spins $\uparrow$ et $\downarrow$.

Notons qu'un défi pour l'information quantique consiste à transformer l'état thermique ci dessus pour n qubits

$$\underbrace{\varrho_{\text{therm}} \otimes \varrho_{\text{therm}} \otimes \cdots \otimes \varrho_{\text{therm}}}_{n \text{ fois}}$$

en un état

$$\underbrace{|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \cdots \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|}_{n \text{ fois}}$$

permettant d'initialiser les algorithmes quantiques. On ne peut pas transformer un état thermique en état pur avec des transformations unitaires. Ainsi les états initiaux des expériences quantiques, utilisant la RMN, ne sont pas de vrais états purs (mais pseudo-purs).

Matrices Densité 2x2

Toute matrice 2x2 telle que $\varrho = \varrho^+$ et Tr $\varrho = 1$ peut s'écrire

$$\varrho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+a & b+ic \\ b-ic & 1-a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On veut encore $\varrho \geq 0$ ce qui signifie λ_1 et $\lambda_2 \geq 0$ (les deux valeurs propres). On ne peut pas avoir λ_1 et $\lambda_2 < 0$ car Tr $\varrho = \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Donc il suffit d'assurer $\lambda_1\lambda_2 \geq 0$. Mais

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2 = \text{Det } \varrho &= \frac{1}{4}\{(1+a)(1-a) - (b+ic)(b-ic)\} \\ &= \frac{1}{4}\{1 - a^2 - b^2 - c^2\}\end{aligned}$$

Ainsi il faut prendre $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1$. Le lecteur remarquera que :

$$\varrho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)$$

Ainsi nous avons prouvé :

Théorème : L'ensemble des matrices densité 2x2 est de la forme $\varrho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{v} \cdot \vec{\sigma})$ avec $||\vec{v}|| \leq 1$. C'est une boule de rayon 1.

Les matrices densités avec $||\vec{v}|| = 1$ ont un statut particulier. On peut vérifier que si $||\vec{v}|| = 1$, alors $\varrho^2 = \varrho$. En effet :

$$\begin{aligned}
\varrho^2 &= \tfrac{1}{4} \quad (\mathbb{1} + 2\vec{v} \cdot \vec{\sigma} + {v_x}^2{\sigma_x}^2 + {v_y}^2{\sigma_y}^2 + {v_z}^2{\sigma_z}^2 + v_xv_y(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) + v_xv_z(\sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) \\
&\qquad + v_yv_z(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y)) \\
&= \tfrac{1}{4} \quad (\mathbb{1} + 2\vec{v} \cdot \vec{\sigma} + \underbrace{{v_x}^2\mathbb{1} + {v_y}^2\mathbb{1} + {v_z}^2\mathbb{1}}_{\mathbb{1}}) \\
&= \tfrac{1}{2} \quad (\mathbb{1} + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = \varrho
\end{aligned}$$

Ces états sont en fait des projecteurs $|\psi\rangle\langle\psi|$. Ainsi les vecteurs $\vec{v}, ||\vec{v}|| = 1$ sur la surface de la sphère de Bloch représentent les kets usuels de l'espace d'Hilbert. On les appelle *"états purs"*.

Remarque : On montre que l'ensemble des matrices densité possibles d'un système, est convexe et que les points extrêmaux (ceux qui n'ont pas des combinaisons convexe non-triviales) sont des projecteurs.

9.2 Notion de trace partielle

Considérons un système (p. ex 2 qubits) avec espace d'Hilbert $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$. Si la base de $\mathscr{H}_1$ est $\{|\varphi_i^{(1)}\rangle\}$ et celle de $\mathscr{H}_2$ est $\{|\varphi_j^{(2)}\rangle\}$ alors une base de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ est

$$|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle \qquad i = 1 \ldots n; j = 1 \ldots m$$

Notez la dimension totale de $\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$ est nm. La trace d'une observable $\mathcal{O}$ est égale à la somme des éléments diagonaux (et celle-ci ne dépend pas de la base).

$$\text{Tr } \mathcal{O} = \sum_{\text{i,j}} \langle\varphi_i^{(1)}| \otimes \langle\varphi_j^{(2)}|\mathcal{O}|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle$$

Cette trace peut encore s'écrire de deux façon très différentes suivant que l'on fait les sommes dans l'ordre $\sum_i \sum_j$ ou $\sum_j \sum_i$. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \mathcal{O} &= \sum_i \langle\varphi_i^{(1)}| \left(\sum_j \langle\varphi_j^{(2)}|\mathcal{O}|\varphi_j^{(2)}\rangle \right) |\varphi_i^{(1)}\rangle \\ &\equiv \mathrm{Tr}_1\ (\mathrm{Tr}_2 \mathcal{O})\end{aligned}$$

Ici Tr_2 est une trace partielle sur le deuxième espace. $(\mathrm{Tr}_2\mathcal{O})$ est une matrice agissant sur le premier espace, dont on peut prendre la trace $\mathrm{Tr}_1(\mathrm{Tr}_2\mathcal{O})$ pour obtenir la trace totale $\mathrm{Tr}\ \mathcal{O}$. De façon similaire on a aussi :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\ \mathcal{O} &= \sum_j \langle\varphi_j^{(2)}| \left(\sum_i \langle\varphi_i^{(1)}|\mathcal{O}|\varphi_i^{(1)}\rangle \right) |\varphi_j^{(2)}\rangle \\ &\equiv \mathrm{Tr}_2\ (\mathrm{Tr}_1 \mathcal{O})\end{aligned}$$

Exercice : Considérer $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} d & e \\ \bar{e} & f \end{pmatrix}$ et vérifier explicitement ces formules :

- $\mathrm{Tr}_2\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \cdot (d+f)$

  $\mathrm{Tr}_1(\mathrm{Tr}_2\mathcal{O}) = (a+c)(d+f) = ad + af + cd + cf$
- $\mathrm{Tr}_1\mathcal{O} = (a+c) \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ \bar{e} & f \end{pmatrix}$

  $\mathrm{Tr}_2(\mathrm{Tr}_1\mathcal{O}) = (a+c)(d+f) = ad + af + cd + cf$
- $\mathcal{O} = \left(\begin{array}{cc|cc} ad & ae & bd & be \\ a\bar{e} & af & b\bar{e} & bf \\ \hline \bar{b}d & \bar{b}e & cd & ce \\ \bar{b}\bar{e} & \bar{b}f & c\bar{e} & cf \end{array}\right)$ et $\mathrm{Tr}\ \mathcal{O} = ad + af + cd + cf$!

9.3 Matrice Densité Réduite

Dans le paragraphe 1 nous avons vu que la matrice densité permet de décrire l'état statistique d'un ensemble (une source d'atomes p.ex). Ici nous allons montrer que les matrices densités permettent aussi de décrire l'état d'un système unique. C'est le point de vue de Landau.

Soit $\mathcal{S}$ un *"système d'intérêt"* et $\mathcal{U}$ *"l'univers"* dans lequel $\mathcal{S}$ est plongé. La partie $\mathcal{U}\backslash\mathcal{S}$ est appelée l'environnement de $\mathcal{S}$ et sera notée $\mathcal{E}$. Nous supposons que $\mathcal{U}$ est dans un état pur $|\psi\rangle$ qui vit dans l'espace d'Hilbert $\mathscr{H}_\mathcal{U} = \mathscr{H}_\mathcal{S} \otimes \mathscr{H}_\mathcal{E}$. L'état pur $|\psi\rangle$ correspond à une matrice densité $|\psi\rangle\langle\psi|$ (un projecteur) et la valeur moyenne d'une observable $\mathcal{O}$ de l'univers est donnée par

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathcal{U}}\ \mathcal{O}\ |\psi\rangle\langle\psi|$$

Maintenant si on s'intéresse uniquement à des observables "locales" de $\mathcal{S}$, c'est à dire de la forme $\mathcal{O} = A \otimes \mathbb{1}$ on a :

$$\langle A \otimes \mathbb{1} \rangle = \ \mathrm{Tr}_{\mathcal{U}}\ A \otimes \mathbb{1}\ |\psi\rangle\langle\psi| = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}}\ \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}} A \otimes \mathbb{1} |\psi\rangle\langle\psi| = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}} A(\mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}|\psi\rangle\langle\psi|)$$

Il est donc naturel d'introduire la matrice densité réduite :

$$\varrho_{\mathcal{S}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}}|\psi\rangle\langle\psi|$$

obtenue en éliminant (ou tracant) les degrés de liberté de l'environnement. Grâce à $\varrho_{\mathcal{S}}$ on peut calculer

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}_{\mathcal{S}}\ A\varrho_{\mathcal{S}}$$

Plus gńéralement $varrho_{\mathcal{S}}$ donne une description complète du système $\mathcal{S}$.

Exemples :

1) **Traces partielles d'états produit.** Si $|\psi\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ alors $|\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \otimes |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$ et $\varrho_1 = \mathrm{Tr}_2\ |\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\ \underbrace{\mathrm{Tr}_2\ |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|}_{\mathrm{Tr}\ \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle=1}$ et $\varrho_2 = \mathrm{Tr}_1\ |\psi\rangle\langle\psi| = |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\ \underbrace{\mathrm{Tr}_1\ |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|}_{1}$.
   Ici $|\psi\rangle$ est un produit tensoriel de $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$. Il n'y a aucune corrélation entre 1 & 2 et les états partiels sont $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$.
2) **Traces partielles d'un état intriqué.** Soit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ un état intriqué entre Alice et Bob. On a $\varrho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$ et $\mathrm{Tr}_2\ \varrho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ et idem pour $\mathrm{Tr}_1\ \varrho$. Ainsi la description locale d'Alice (et/ou de Bob) est un état de mélange totalement désordonné $\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$.

9.4 Modèles de Bruit en MQ

Pour nous le *"bruit"* est l'effet de l'environnement sur un système. Plus précisément, on s'intéresse uniquement au système et on veut une description effective de celui-ci, qui incorpore l'effet de l'environnement comme du *"bruit"*. Soit $\mathcal{S}$ dans l'état initial $\varrho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$, et l'environnement $\mathcal{E}$ dans l'état initial $|E\rangle\langle E|$. L'état total est initialement totalement décorrélé :

$$|\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |E\rangle\langle E|.$$

A l'instant t (ultérieur) l'état total sera (U_t = opérateur d'évolution du système total $\mathcal{S} \cup \mathcal{E}$) :

$$U_t \ |\varphi\rangle\langle\varphi| \ \otimes \ |E\rangle\langle E| \ U_t^+$$

Ici l'opérateur d'évolution va introduire un couplage non-trivial entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{E}$ et l'état totale ne sera plus un produit tensoriel mais sera intriqué. Néanmoins, nous voulons une description de $\mathcal{S}$ seulement, et celle-ci est donnée par la matrice densité réduite :

$$\begin{aligned}\varrho_{\mathcal{S}}(t) &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{E}} \ U_t \ |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |E\rangle\langle E| \ U_t^+ \\ &= \sum_k \langle\varphi_k|U_t \ |\varphi\rangle\langle\varphi| \otimes |E\rangle\langle E| \ U_t^+ \ |\varphi_k\rangle\end{aligned}$$

où $\{|\varphi_k\rangle\}$ est une base de $\mathcal{E}$. Cette dernière formule se réécrit comme :

$$\varrho_{\mathcal{S}}(t) = \sum_k \langle\varphi_k|U_t|E\rangle(|\varphi\rangle\langle\varphi|)\langle E|U_t^+|\varphi_k\rangle$$

où $\langle\varphi_k|U_t|E\rangle \equiv E_k$ et $\langle E|U_t^+|\varphi_k\rangle = E_k^+$ sont des matrices dans $\mathcal{S}$. Les matrices $\{E_k\}$ satisfont à la propriété importante

$$\sum_k E_k^+ E_k = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}.$$

En effet

$$\begin{aligned}\sum_k E_k^+ E_k &= \sum_k \langle E|U_t^+|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|U_t|E\rangle \\ &= \langle E|U_t^+ \sum_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|U_t|E\rangle \\ &= \langle E|U_t^+ \mathbb{1}_{\mathcal{E}} U_t|E\rangle \\ &= \langle E|U_t^+ U_t|E\rangle \\ &= \langle E|\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{E}}|E\rangle = \mathbb{1}_{\mathcal{S}} \cdot \langle E|\mathbb{1}_{\mathcal{E}}|E\rangle = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}\langle E|E\rangle = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}.\end{aligned}$$

Ces considérations nous montrent que l'effet du bruit est modélisé par des transformations :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} : \mathrm{Mat}(\mathscr{H}_{\mathcal{S}} \to \mathscr{H}_{\mathcal{S}}) &\to \mathrm{Mat}(\mathscr{H}_{\mathcal{S}} \to \mathscr{H}_{\mathcal{S}}) \\ \varrho_{\mathcal{S}} &\mapsto \mathcal{E}(\varrho_{\mathcal{S}}) = \varrho'_{\mathcal{S}} = \sum_k E_k \varrho_{\mathcal{S}} E_k^+\end{aligned}$$

pour un ensemble de matrices E_k telles que $\sum_k E_k^+ E_k = \mathbb{1}_{\mathcal{S}}$. La donnée de ces matrices définit un modèle de bruit.

Théorème de représentation de Kraus.

a) Soit $\mathcal{E}$ une transformation comme ci-dessus. Si ϱ est une matrice densité, alors $\varrho' = \mathcal{E}(\varrho)$ est aussi une matrice densité.

b) Soit $\mathcal{E}$ tel que $\mathcal{E}(\varrho)$ soit une matrice densité quand ϱ est elle-même une matrice densité. Alors il existe des matrices E_k qui représentent $\mathcal{E}$ comme ci-dessus.

Idées sur la preuve.

– La preuve de a) est facile. En effet l'expression de $\varrho'_{\mathcal{S}}$ montre que $\varrho'^{+}_{\mathcal{S}} = \varrho'_{\mathcal{S}}$ car $\varrho^{+}_{\mathcal{S}} = \varrho_{\mathcal{S}}$ et $\varrho'_{\mathcal{S}} \geq 0$ car $E_k \varrho_{\mathcal{S}} E_k^{+} \geq 0$ puisque $\varrho_{\mathcal{S}} \geq 0$ (puisque $\langle v | E_k \varrho_{\mathcal{S}} E_k^{+} | v\rangle \geq 0$ si $\langle w | \varrho_{\mathcal{S}} | w\rangle \geq 0\ \forall w$).

$$\begin{aligned} \text{De plus Tr } \varrho'_{\mathcal{S}} &= \textstyle\sum_k \text{Tr } (E_k \varrho_{\mathcal{S}} E_k^{+}) \\ &= \textstyle\sum_k \text{Tr } \varrho_{\mathcal{S}} E_k^{+} E_k \\ &= \text{Tr } \varrho_{\mathcal{S}} \underbrace{\sum_k E_k^{+} E_k}_{\mathbb{1}_{\mathcal{S}}} \qquad = \text{Tr } \varrho_{\mathcal{S}} = 1. \end{aligned}$$

– La réciproque b) est plus dure à prouver et nous ne le faisons pas ici. Mais l'idée principale consiste à dire que si $\mathcal{E}(\varrho)$ est une matrice densité, elle peut être obtenue comme Trace Partielle sur un espace plus grand que $\mathcal{S}$ (c'est ce point qui est non trivial : toute matrice densité provient de la trace partielle d'un certain état pur). Ensuite on procède comme avant et on construit les opérateurs E_k et E_k^{+} explicitement.

Remarque : Les opérateurs du type $\mathcal{E}$ sont les opérations les plus générales possibles que l'on peut faire sur une matrice densité en MQ, mis à part l'opération de mesure.

Cas particulier d'opérations $\mathcal{E}$.

– Evolution unitaire $\varrho' = U \varrho U^{+}$ ici $U^{+}U = \mathbb{1}$ donc $U = \{E_k\}$.

– Mesure *sans enregistrement* de l'état final.

$$\varrho \to \varrho' = \sum_n P_n \varrho P_n \tag{9.2}$$

Ici $\sum_n P_n^{+} P_n = \sum_n P_n = 1$ donc $\{E_k\} = \{P_n\}$.

<u>Justifications de 9.2 :</u> Soit $|\psi\rangle\langle\psi|$ un état mesuré dans la base $\{P_n\}$. On obtient

$$\frac{P_n\ |\psi\rangle\langle\psi|\ P_n}{\text{Tr } P_n\ |\psi\rangle\langle\psi|\ P_n} \qquad \text{avec prob } = \text{Tr}(P_n\ |\psi\rangle\langle\psi|\ P_n).$$

Donc la matrice densité après la mesure est :

$$\sum_n \mathrm{Tr}(P_n\ |\psi\rangle\langle\psi|\ P_n) \cdot \frac{P_n\ |\psi\rangle\langle\psi|\ P_n}{\mathrm{Tr}\ P_n\ |\psi\rangle\langle\psi|\ P_n} = \sum_n P_n\ |\psi\rangle\langle\psi|\ P_n.$$

Ces formules sont valables aussi si on remplace $|\psi\rangle\langle\psi|$ par ϱ général.

Remarque : Quand on observe le résultat *d'une unique mesure* on obtient *un des états* purs $\frac{P_n \varrho P_n}{\mathrm{Tr}\ P_n \varrho P_n}$; qui n'est pas un mélange statistique de la forme $\sum_k E_k \varrho E_k^+$ avec $\sum_k E_k^+ E_k = 1$. C'est ce point précis qui rend le postulat de la mesure quelque peu "mystérieux".

9.5 Un Modèle simple de Décohérence

Considérons un modèle de bruit qui correspond à la transformation suivante :

$$\varrho \mapsto \mathcal{E}(\varrho) = (1-p)\varrho + p\sigma_z \varrho \sigma_z.$$

Ici $\mathcal{E}(\varrho) = E_1 \varrho E_1^+ + E_2 \varrho E_2^+$ avec les matrices

$$E_1 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

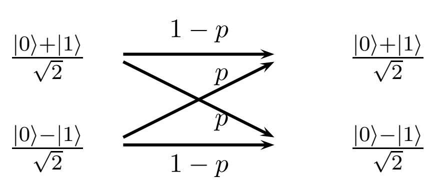
On vérifie facilement que cette transformation est admissible car

$$E_1^+ E_1 + E_2^+ E_2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'interprétation physique de cette transformation ? Prenons $\varrho = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| + \bar{\beta}\langle 1|)$. Alors

$$\mathcal{E}(\varrho) = (1-p)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| + \bar{\beta}\langle 1|) + p(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| - \bar{\beta}\langle 1|)$$

Cette équation signifie qu'avec probabilité $(1-p)$ l'état de départ $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ est inchangé et avec probabilité p l'état est modifié en $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$. On appelle cette transformation *"phase-flip channel"* car on agit sur la phase relative, ce qui est un processus proprement quantique. Ici nous représentons ce canal pour les états $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, voir figure.



Remarque : les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ restent invariants (à une phase près) pour ce canal.

$$|0\rangle \xrightarrow{1} |0\rangle$$
$$|1\rangle \xrightarrow{1} -|1\rangle.$$

ou en d'autres termes :

$$\mathcal{E}(|0\rangle\langle 0|) = (1-p)|0\rangle\langle 0| + p\sigma_z|0\rangle\langle 0|\sigma_z = |0\rangle\langle 0|$$

et

$$\mathcal{E}(|1\rangle\langle 1|) = (1-p)|1\rangle\langle 1| + p\sigma_z|1\rangle\langle 1|\sigma_z = |1\rangle\langle 1|.$$

Revenons au modèle de décohérence. Que se passe-t-il si on prend un qubit initial dans l'état

$$\varrho_0 = \frac{1}{2}(I + \vec{v_0} \cdot \vec{\sigma})$$

et que l'on applique cette transformation N fois ? Quand on l'applique une fois on obtient

$$\mathcal{E}(\varrho_0) = \varrho_1 = \frac{1}{2}(1-p)(I + \vec{v_0} \cdot \vec{\sigma}) + \frac{1}{2}p\sigma_z(I + \vec{v_0} \cdot \vec{\sigma})\sigma_z.$$

Le calcul donne

$$\varrho_1 = \frac{1}{2}(I + \vec{v_1} \cdot \vec{\sigma}) \qquad \text{avec}$$
$$\vec{v_1} = ((1-2p)v_0^x; (1-2p)v_0^y; (1-2p)v_0^z)\,.$$

De même on trouve en itérant :

$$\mathcal{E}^N(\varrho_0) = \varrho_N = \frac{1}{2}(I + \vec{v_N} \cdot \vec{\sigma})$$

avec

$$\vec{v_N} = \left((1-2p)^N v_0^x; (1-2p)^N v_0^y; (1-2p)^N v_0^z\right).$$

Si $N \to +\infty$, $\vec{v_N} \to (0; 0; v_0^z)$ et la matrice densité finale est

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + v_0^z & 0 \\ 0 & 1 - v_0^z \end{pmatrix}.$$

La relaxation vers l'état final est exponentielle avec une échelle de temps

$$T = \frac{\tau}{\ln(1-2p)}$$

où τ est l'échelle de temps de chaque phase-flip. Si par exemple on part de l'état initial pur ($v_0^z = 0$).

$$\frac{|\text{chat vivant}\rangle + |\text{chat mort}\rangle}{\sqrt{2}}$$

sans l'effet des *"phase-flips"* on converge vers l'état de mélange $\frac{1}{2}|\text{vivant}\rangle\langle\text{vivant}| + \frac{1}{2}|\text{mort}\rangle\langle\text{mort}|$.

Ce modèle de décohérence n'explique cependant pas pourquoi $\{|\text{vivant}\rangle, |\text{mort}\rangle\}$ est la seule base dans laquelle on observe les chats macroscopiques. En effet la matrice densité obtenue est aussi égale à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| \\ \text{avec} \qquad &|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{vivant}\rangle + |\text{mort}\rangle) \\ &|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{vivant}\rangle - |\text{mort}\rangle) \end{aligned}$$

Si on pouvait mesurer un chat dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ on l'observerait (après décohérence) avec probabilité $\frac{1}{2}$ dans l'état $|+\rangle$ et probabilité $\frac{1}{2}$ dans l'état $|-\rangle$. Ce qui parait absurde pour un chat ne l'est pas pour un spin. Le processus de sélection des bases de mesure classiques (vivant/mort) pour les objets macroscopiques est un problème profond de la mécanique quantique.

9.6 Modéles de Canaux binaires

a) Canal *"Phase-Flip"*. Voir paragraphe 5.

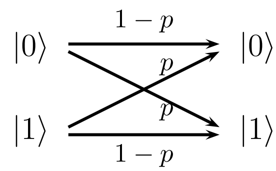
b) Canal *"Bit-Flip"*. C'est l'analogue du canal Binaire Symmétrique (BSC)

$$\mathcal{E}(\varrho) = (1-p)\varrho + p\sigma_x\varrho\sigma_x$$

Ici $E_1 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour un état de départ $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ on a :

$$\mathcal{E}(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = (1-p)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\bar{\alpha}\langle 0| + \bar{\beta}\langle 1|) + p(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\bar{\alpha}\langle 1| + \bar{\beta}\langle 0|).$$

L'état $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ est inchangé avec probabilité $1-p$ et modifié en $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$ avec probabilité p.



Mais notez que $|+\rangle\langle+|$ et $|-\rangle\langle-|$ sont inchangés

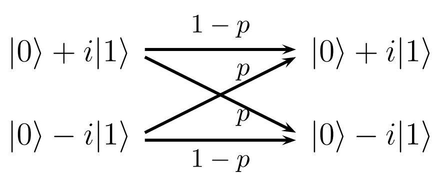
$$\begin{array}{ccc} |+\rangle\langle+| & \xrightarrow{1} & |+\rangle\langle+| \\ |-\rangle\langle-| & \xrightarrow{1} & |-\rangle\langle-|. \end{array}$$

c) *"Bit & Phase Flip Channel".*

$$\mathcal{E}(\varrho) = (1-p)\varrho + p\sigma_y\varrho\sigma_y.$$

$$E_1 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici



d) *Canal de dépolarisation compléte.*

$$\mathcal{E}(\varrho) = (1-p)\varrho + \frac{p}{3}(\sigma_x\varrho\sigma_x + \sigma_y\varrho\sigma_y + \sigma_z\varrho\sigma_z)$$

Pour ce canal l'état est inchangé avec probabilité $1-p$ et devient complétement isotrope avec probabilité p. On a :

$$E_1 = \sqrt{1-p}\,\mathbb{1} \qquad ; E_2 = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sigma_x \qquad ; E_3 = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sigma_y \qquad ; E_4 = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\sigma_z.$$

On vérifie facilement que

$$E_1^+E_1 + E_2^+E_2 + E_3^+E_3 + E_4^+E_4 = \mathbb{1}.$$

On peut aussi montrer que

$$\mathcal{E}(\varrho) = (1-p')\varrho + p' \cdot \frac{\mathbb{1}}{2}$$

ou p' est relié (proportionnel) à p (voir exercices) Cette formule qui justifie l'interprétation l'appelation "dépolarisation complète".