
Solution de la série 2 Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Photons et particules classiques*

1.

$$\begin{aligned}\langle \alpha | \theta \rangle &= (\sin \alpha \langle x | + \langle y | \cos \alpha)(\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle) \\ &= \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta \\ &= \cos(\theta - \alpha).\end{aligned}$$

Donc $|\langle \alpha | \theta \rangle|^2 = \cos^2(\theta - \alpha)$. Et

$$\begin{aligned}\langle \alpha_{\perp} | \theta \rangle &= (-\cos \alpha \langle x | + \sin \alpha \langle y |)(\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle) \\ &= -\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta \\ &= \sin(\alpha - \theta).\end{aligned}$$

Donc $|\langle \alpha_{\perp} | \theta \rangle|^2 = \sin^2(\theta - \alpha)$.

2. L' état est intriqué, c.a.d qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit tensoriel :

$$\sin \theta |x, 1\rangle + \cos \theta |y, 2\rangle = |\psi\rangle$$

Probabilité d'observer le photon sur la trajectoire 1 ou 2 : prendre les projecteurs $P_1 = I \otimes |1\rangle\langle 1|$ et $P_2 = I \otimes |2\rangle\langle 2|$ où I est l'identité ($I = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|$).

$$\begin{aligned}\text{Prob}(1) &= \langle \psi | P_1 | \psi \rangle = (\sin \theta \langle x, 1 | + \cos \theta \langle 2, y |) I \otimes |1\rangle\langle 1| (\sin \theta |x, 1\rangle + \cos \theta |y, 2\rangle) \\ &= \sin^2 \theta \langle x | I | x \rangle \langle 1 | 1 \rangle \langle 1 | 1 \rangle \\ &= \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

De même $\text{Prob}(2) = \langle \psi | P_2 | \psi \rangle = \cos^2 \theta$.

3. Après la deuxième lame biréfringente l'état est $|\theta, 1\rangle$ car elle agit de façon symétrique par rapport à la première (renversement du temps). On peut oublier le degré de liberté de trajectoire, et représenter l'état par $|\theta\rangle = \sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle$.

La probabilité de détection est égale à $\text{Prob}(|\alpha\rangle) = |\langle \alpha | \theta \rangle|^2 = \cos^2(\theta - \alpha)$.

4. Si on "remplace le photon par un particule classique" :

- avec probabilité $\sin^2 \theta$ il passe par la trajectoire inférieure et sa polarisation est horizontale $|x\rangle$. Donc après la deuxième lame biréfrégente son état est $|x\rangle$ et la probabilité de détection est $|\langle \alpha | x \rangle|^2 = \sin^2 \alpha$. La probabilité totale de cet événement est $\sin^2 \theta \sin^2 \alpha$.
- avec probabilité $\cos^2 \theta$ il passe par la trajectoire supérieure et sa polarisation est verticale $|y\rangle$. Donc après la deuxième lame biréfrégente son état est $|y\rangle$ et la probabilité de détection est $|\langle \alpha | y \rangle|^2 = \cos^2 \alpha$. La probabilité totale de l'évènement est $\cos^2 \theta \cos^2 \alpha$.

Finalement on obtient :

$$\text{Prob détection} = \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + \cos^2 \theta \cos^2 \alpha$$

La grande différence avec la MQ est que le terme d'interférence est absent.

Remarque : Ce terme d'interférence est obtenu en développant le résultat quantique (de la question 3)

$$\cos^2(\theta - \alpha) = \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + \cos^2 \theta \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \theta \sin \alpha \sin \theta$$

Il s'agit du dernier terme.

Exercice 2 Polarisation et inégalité de Heisenberg

1.

$$|\Psi\rangle = \cos \theta |x\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |y\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \cos \alpha |x\rangle + \sin \alpha |y\rangle$$

La probabilité de détection est

$$\begin{aligned} \text{Prob}(p_\alpha = +1) &= |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2 \\ &= |\cos \theta \cos \alpha + e^{i\phi} \sin \theta \sin \alpha|^2 \\ &= |\cos \theta \cos \alpha + \cos \phi \sin \theta \sin \alpha + i \sin \phi \sin \theta \sin \alpha|^2 \\ &= (\cos \theta \cos \alpha + \cos \phi \sin \theta \sin \alpha)^2 + (\sin \phi \sin \theta \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \theta \cos^2 \alpha + (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \sin^2 \theta \sin^2 \alpha + 2 \cos \phi \cos \alpha \cos \theta \sin \theta \sin \alpha \\ &= (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)^2 + 2(\cos \phi - 1) \cos \alpha \cos \theta \sin \theta \sin \alpha \end{aligned}$$

Notez que

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha \cos \theta \sin \theta \sin \alpha &= \frac{1}{2}(\cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta - \alpha))(\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)) \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2(\theta - \alpha) - \cos^2(\theta + \alpha)) \end{aligned}$$

et que

$$\cos \phi - 1 = -2 \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \text{Prob}(p_\alpha = +1) &= (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha)^2 + 2(\cos \phi - 1) \cos \alpha \cos \theta \sin \theta \sin \alpha \\ &= \cos^2(\theta - \alpha) - \sin^2 \frac{\phi}{2} (\cos^2(\theta - \alpha) - \cos^2(\theta + \alpha)) \\ &= \cos^2(\theta - \alpha) \cos^2 \frac{\phi}{2} + \cos^2(\theta + \alpha) \sin^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned}$$

Pour la seconde probabilité on a

$$\text{Prob}(p_\alpha = -1) = 1 - \text{Prob}(p_\alpha = +1) = 1 - \cos^2(\theta - \alpha) \cos^2 \frac{\phi}{2} + \cos^2(\theta + \alpha) \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

2. Pour l'analyseur avec un angle α , l'espérance est

$$\begin{aligned} \text{Esp}[p_\alpha] &= +1 \cdot \text{Prob}(p_\alpha = +1) + (-1) \text{Prob}(p_\alpha = -1) \\ &= \text{Prob}(p_\alpha = +1) - 1(1 - \text{Prob}(p_\alpha = +1)) \\ &= 2 \text{Prob}(p_\alpha = +1) - 1 \end{aligned}$$

et la variance est

$$\begin{aligned} \text{Var}[p_\alpha] &= \text{Esp}^2[p_\alpha] - (\text{Esp}[p_\alpha])^2 \\ &= 1 - (\text{Esp}[p_\alpha])^2 \\ &= 1 - (\text{Prob}(p_\alpha = +1))^2 \\ &= 4 \text{Prob}(p_\alpha = +1) (1 - \text{Prob}(p_\alpha = +1)) \end{aligned}$$

Pour l'analyseur avec un angle β , l'espérance et la variance sont

$$\text{Esp}[p_\beta] = 2 \text{Prob}(p_\beta = +1) - 1$$

$$\text{Var}[p_\beta] = 4 \text{Prob}(p_\beta = +1) (1 - \text{Prob}(p_\beta = +1))$$

3. Pour $\varphi = \alpha$ notez que

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | P_\alpha | \Psi \rangle &= \langle \Psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \Psi \rangle - \langle \Psi | \alpha_\perp \rangle \langle \alpha_\perp | \Psi \rangle \\
&= |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2 - |\langle \alpha_\perp | \Psi \rangle|^2 \\
&= 2 |\langle \alpha | \Psi \rangle|^2 - 1 \\
&= 2 \text{Prob}(p_\alpha = +1) - 1 \\
&= \text{Esp}[p_\alpha]
\end{aligned}$$

Notez aussi que

$$\langle \Psi | P_\alpha^2 | \Psi \rangle = 1$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | P_\alpha^2 | \Psi \rangle - \langle \Psi | P_\alpha | \Psi \rangle^2 &= 1 - (\text{Exp}[p_\alpha])^2 \\
&= (\text{Exp}[p_\alpha^2]) - (\text{Exp}[p_\alpha])^2 \\
&= \text{Var}[p_\alpha]
\end{aligned}$$

Pour $\varphi = \beta$ les égalités sont les mêmes.

4. On peut réécrire le projecteur comme

$$\begin{aligned}
P_\alpha &= |\alpha\rangle \langle \alpha| - |\alpha_\perp\rangle \langle \alpha_\perp| \\
&= \cos^2 \alpha |x\rangle \langle x| + \sin^2 \alpha |y\rangle \langle y| + \cos \alpha \sin \alpha (|x\rangle \langle y| + |y\rangle \langle x|) \\
&\quad - \sin^2 \alpha |x\rangle \langle x| - \cos^2 \alpha |y\rangle \langle y| + \cos \alpha \sin \alpha (|x\rangle \langle y| + |y\rangle \langle x|) \\
&= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (|x\rangle \langle x| - |y\rangle \langle y|) \\
&\quad + 2 \sin \alpha \cos \alpha (|x\rangle \langle y| + |y\rangle \langle x|) \\
&= \cos 2\alpha \cdot \sigma_z + \sin 2\alpha \cdot \sigma_x
\end{aligned}$$

Le commutateur devient

$$\begin{aligned}
[P_\alpha, P_\beta] &= P_\alpha P_\beta - P_\beta P_\alpha \\
&= \cos 2\alpha \cos 2\beta \cdot \sigma_z^2 + \sin 2\alpha \cos 2\beta \cdot \sigma_x \sigma_z \\
&\quad + \sin 2\beta \cos 2\alpha \cdot \sigma_z \sigma_x + \sin 2\alpha \sin 2\beta \cdot \sigma_x^2 \\
&\quad - \cos 2\alpha \cos 2\beta \cdot \sigma_z^2 - \sin 2\alpha \cos 2\beta \cdot \sigma_z \sigma_x \\
&\quad - \sin 2\beta \cos 2\alpha \cdot \sigma_x \sigma_z - \sin 2\alpha \sin 2\beta \cdot \sigma_x^2 \\
&= \sin 2\alpha \cos 2\beta [\sigma_x, \sigma_z] \\
&\quad + \sin 2\beta \cos 2\alpha [\sigma_z, \sigma_x] \\
&= (\sin 2\beta \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\beta) [\sigma_z, \sigma_x] \\
&= \sin(2(\beta - \alpha)) [\sigma_z, \sigma_x] \\
&= \sin(2(\beta - \alpha)) (|x\rangle \langle y| - |y\rangle \langle x|)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|\langle \Psi | [P_\alpha, P_\beta] | \Psi \rangle| &= \sin(2(\beta - \alpha)) |\langle \Psi | (|x\rangle \langle y| - |y\rangle \langle x|) | \Psi \rangle| \\
&= \sin(2(\beta - \alpha)) |\sin \theta \cos \theta e^{-i\phi} - \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}| \\
&= \sin(2(\beta - \alpha)) |\sin \theta \cos \theta (e^{-i\phi} - e^{i\phi})| \\
&= \sin(2(\beta - \alpha)) 2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta \\
&= \sin(2(\beta - \alpha)) \sin \phi \sin 2\theta
\end{aligned}$$

L'inégalité de Heisenberg est :

$$\begin{aligned}
4\sqrt{\text{Prob}(p_\alpha = +1)(1 - \text{Prob}(p_\alpha = +1))} \sqrt{\text{Prob}(p_\beta = +1)(1 - \text{Prob}(p_\beta = +1))} \\
\geq \frac{1}{2} \sin(2(\beta - \alpha)) \sin \phi \sin 2\theta
\end{aligned}$$

(a) En particulier pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$ on a :

$$\text{Prob}(p_\alpha) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\cos^2\frac{\phi}{2} + \sin^2\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}(p_\beta) = \cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos^2\frac{\phi}{2} + \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta P_\alpha = \Delta P_\beta = \sqrt{4 \text{Prob}(p_\alpha = +1)(1 - \text{Prob}(p_\alpha = +1))} = 1$$

$$\Delta P_\alpha \Delta P_\beta = 1$$

$$\frac{1}{2} |\langle \Psi | [P_\alpha, P_\beta] | \Psi \rangle| = \frac{1}{2} \sin \pi \sin \phi \sin \frac{\pi}{2} = 0$$

$$1 \geq 0$$

L'inégalité est satisfaite.

(b) Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ on a :

$$\text{Prob}(p_\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}(p_\beta) = \cos^2(0) \cos^2\frac{\phi}{2} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin^2\frac{\phi}{2} = \cos^2\frac{\phi}{2}$$

$$\Delta P_\alpha = 1$$

$$\Delta P_\beta = \sqrt{4 \cos^2\frac{\phi}{2} (1 - \cos^2\frac{\phi}{2})} = |\sin \phi|$$

$$\Delta P_\alpha \Delta P_\beta = |\sin \phi|$$

$$\frac{1}{2} |\langle \Psi | [P_\alpha, P_\beta] | \Psi \rangle| = \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi}{2} \sin \phi \sin \frac{\pi}{2} \right| = \frac{1}{2} |\sin \phi|$$

$$|\sin \phi| \geq \frac{1}{2} |\sin \phi|$$

L'inégalité est satisfaite.

(c) Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ on a :

$$\text{Prob}(p_\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}(p_\beta) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos^2 \frac{\phi}{2} + \cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \cos^2 \frac{\phi}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \phi \end{aligned}$$

$$\Delta P_\alpha = 1$$

$$\Delta P_\beta = \sqrt{4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \phi \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \phi \right)} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \phi}$$

$$\Delta P_\alpha \Delta P_\beta = \sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \phi}$$

$$\frac{1}{2} |\langle \Psi | [P_\alpha, P_\beta] | \Psi \rangle| = \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\pi}{3} \sin \phi \sin \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sin \phi|$$

Il faut justifier :

$$\sqrt{1 - \frac{3}{4} \cos^2 \phi} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} |\sin \phi|$$

Notez que cette inégalité est équivalente à

$$1 - \frac{3}{4} \cos^2 \phi \geq \frac{3}{4} \sin^2 \phi$$

qui est équivalente à

$$1 \geq \frac{3}{4}$$