TRAITEMENT QUANTIQUE DE L"INFORMATION - SOLUTIONS SERIE 9 - 14 mai 2010

Exercice 1 :

(a) On peut toujours trouve la réponse en maximum 3 questions. En effet lors de la 3 ième questions si on n' a pas encore présentéà l' oracle la bonne entrée, alors on sait que la derniére entrée restante est la bonne. Donc il y a 3évémements :
- trouves X_0 en 1 questions ; prob=$\frac{1}{4}$.
- trouves X_0 en 2 questions ; prob=$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
- trouves X_0 en 3 questions ; prob=$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{4}$.

Le numbre moyen de questions est :

$$\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$

(b) En regardant la théorie on voit qu' une question suffit !

(c) L' entré $|00\rangle$ est envoyée sur

$$\begin{aligned}
&|00\rangle \to |11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) \\
&\to \frac{1}{2}(|10\rangle - |11\rangle - |10\rangle - |11\rangle) = -|11\rangle \\
&\to -|00\rangle.
\end{aligned}$$

l' entrée $|10\rangle$ est envoyée sur

$$\begin{aligned}
&|10\rangle \to |01\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \\
&\to \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |00\rangle + |01\rangle) = -|01\rangle \to |10\rangle.
\end{aligned}$$

et on vérifie aussi $|01\rangle \to +|01\rangle$ et $|11\rangle \to |11\rangle$.

(d) Etapes de l' algorithme : On supposons $X_0 = 00$ sans perte de généralllé.

1. état initial $|001\rangle$.
2. $H^{\otimes 3}|001\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$.
3. Après l' oracle :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\{&|00\rangle \otimes (|f(00)\rangle - |f(\bar{0}0)\rangle) \\
&+ |01\rangle \otimes (|f(01)\rangle - |f(\bar{0}1)\rangle) \\
&+ |10\rangle \otimes (|f(10)\rangle - |f(\bar{1}0)\rangle) \\
&+ |11\rangle \otimes (|f(11)\rangle - |f(\bar{1}1)\rangle)\}.
\end{aligned}$$

Puisque $f(00) = 1$ et $f(01) = f(10) = f(11) = 0$ on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\{|00\rangle \otimes (|1\rangle - |0\rangle) \\
&\quad + |01\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\quad + |10\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\quad + |11\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)\}.
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\{-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Notez que la future solution est "marquée par la phase -1". C'est le fameux phénomenóne de "kick back phase".
Maintement on applique $H^{\otimes 2}$ au premiere registre. Cela donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\{-|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\
&\quad + |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\
&\quad + |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\
&\quad + |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).
\end{aligned}$$

On applique la changement de signe conditionnel : une : quement $|00\rangle$ change de signe :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\{+|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\
&\quad - |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\
&\quad - vert00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\
&\quad - |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).
\end{aligned}$$

Peut étre qu' une bonne id'ee est de procéder à des simplifications avant de procéder plus avant ! Cela donne.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\{-2|00\rangle - 2|01\rangle - 2|10\rangle - 2|11\rangle\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\quad = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\{+|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\quad = -\underbrace{(H^{\otimes 2}|00\rangle)}_{\text{Ô surprise !}} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = -H^{\otimes 3}(|001\rangle).
\end{aligned}$$

Maintement on applique la dernère série de portes de Hadamard $H^{\otimes 3}$. Puisque $H^2 = 1$ on trouve l' état final $-|00\rangle \otimes |1\rangle$. Mesure du premiere registre damme $X_\sigma = 00$ avec probabilité 1.