# Corrigé . Série 11.

## Exercice 1.

L'état initial du système total est $\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|$.

L'évolution est $U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^{+}$

Cas a) :

$$U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^{+} = \left(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X\right)\left(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|\right)$$
$$\left(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X\right)$$

$$= \left(|0\rangle\langle 0| \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \rho_S \otimes X |0\rangle\langle 0|\right)$$
$$\cdot \left(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X\right)$$

$$= |0\rangle\langle 0| \rho_S |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \rho_S |0\rangle\langle 0| \otimes X|0\rangle\langle 0|$$
$$+ |0\rangle\langle 0| \rho_S |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| X + |1\rangle\langle 1| \rho_S |1\rangle\langle 1| \otimes X|0\rangle\langle 0| X$$

La Trace partielle sur l'environnement, prise terme à terme donne

$$Tr_{\mathcal{E}}\, U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^{+} = |0\rangle\langle 0| \rho_S |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \rho_S |1\rangle\langle 1|$$

On a utilisé les relation $Tr_{\mathcal{E}}\, |0\rangle\langle 0| = 1$ ;

$Tr_{\mathcal{E}}\, X|0\rangle\langle 0| = \langle 0| X |0\rangle = 0$ ; $Tr\, |0\rangle\langle 0| X = 0$ et $Tr\, X|0\rangle\langle 0| X = \langle 0| X^2 |0\rangle = 1$.

Nous voyons que $\rho_S' = E_0 \rho_S E_0^\dagger + E_1 \rho_S E_1^\dagger$ avec

$E_0 = |0\rangle\langle 0|$ et $E_1 = |1\rangle\langle 1|$. On vérifie que

$E_0^\dagger E_0 + E_1^\dagger E_1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \mathbb{1}$.

Cas b)

$U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger$

$$= \left(\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes I + \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X\right) \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| \left(\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes I + \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X\right)$$

$$= \left(\frac{X}{\sqrt{2}} \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{Y}{\sqrt{2}} \rho_S \otimes X|0\rangle\langle 0|\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} \otimes I + \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X\right)$$

$$= \frac{X}{\sqrt{2}} \rho_S \frac{X}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\langle 0| + \frac{X}{\sqrt{2}} \rho_S \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\langle 0| X$$

$$+ \frac{Y}{\sqrt{2}} \rho_S \frac{X}{\sqrt{2}} \otimes X|0\rangle\langle 0| + \frac{Y}{\sqrt{2}} \rho_S \frac{Y}{\sqrt{2}} \otimes X|0\rangle\langle 0| X .$$

La trace partielle sur l'environnement donne :

$$\mathrm{Tr}_\mathcal{E}\, U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger = \frac{X}{\sqrt{2}} \rho_S \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \rho_S \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

en utilisant comme avant,

$\mathrm{Tr}_\mathcal{E}\, |0\rangle\langle 0| = 1$ ; $\mathrm{Tr}_\mathcal{E}\, |0\rangle\langle 0| X = \mathrm{Tr}_\mathcal{E}\, X|0\rangle\langle 0| = 1$ et $\mathrm{Tr}_\mathcal{E}\, X|0\rangle\langle 0| X = 1$.

L'opération finale sur S est :

$$\rho_S' = \frac{1}{2} X \rho_S X + \frac{1}{2} Y \rho_S Y$$

$$= E_0 \rho_S E_0^+ + E_1 \rho_S E_1^+$$

avec $E_0 = \frac{X}{\sqrt{2}}$ et $E_1 = \frac{Y}{\sqrt{2}}$. On a bien

$$E_0^+ E_0 + E_1^+ E_1 = \frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2} = \frac{\mathbb{1}}{2} + \frac{\mathbb{1}}{2} = \mathbb{1}.$$

comme requis.

Exercice 2.

Bit-flip : $\rho' = (1-p)\rho + p X \rho X$ .

Prenons $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{v}.\vec{\sigma})$ . Alors

$$\rho' = \frac{1-p}{2}(I + \vec{v}.\vec{\sigma}) + \frac{p}{2}\left(X^2 + X\vec{v}.\vec{\sigma}X\right).$$

puisque $X^2 = I$ et $XYX = -X^2Y = -Y$ ;

$XZX = -Z$ et $X.X.X = X$ on obtient

$$\rho' = \frac{1-p}{2}(I + v_x X + v_y Y + v_z Z) + \frac{p}{2}(I + v_x X - v_y Y - v_z Z)$$

$$= \frac{1}{2} I + \frac{v_x}{2} X + \frac{1-2p}{2} v_y Y + \frac{1-2p}{2} v_z Z$$

L'application sur la sphère de Bloch est donc

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \longrightarrow \vec{v}' = (v_x, (1-2p)v_y, (1-2p)v_z)$$

Pour $0 \leq p < \frac{1}{2}$ cela correspond à une contraction du plan $yz$, l'axe $x$ restant inchangé. La surface de la sphère devient un ellipsoïde d'axes $(1, \sqrt{1-2p}, \sqrt{1-2p})$.

(Voir dessins de Nielsen et Chuang).

Phase-flip : On trouve que $v_z$ est inchangé et le plan $xy$ est contracté. (voir cours).

Phase & bit flip. On trouve après calculs similaires :

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \longrightarrow \vec{v}' = ((1-2p)v_x, v_y, (1-2p)v_z)$$

Canal dépolarisant.

$$\rho' = p\frac{I}{2} + (1-p)\rho = p\frac{I}{2} + (1-p)\frac{1}{2}(I + \vec{v}\cdot\vec{\sigma})$$

$$= \frac{I}{2} + \frac{1-p}{2}\vec{v}\cdot\vec{\sigma} = \frac{1}{2}(I + (1-p)\vec{v}\cdot\vec{\sigma}).$$

Donc $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \rightarrow$

$$\vec{v}' = ((1-p)v_x, (1-p)v_y, (1-p)v_z)$$

Le rayon de la sphère de Bloch est contracté de $\sqrt{1-p}$.

Exercice 3.

La matrice de parité du code de Hamming $(7, 4)$ est donné par tous les vecteurs non nuls à $r$ composantes pour $2^r - 1 = 7$ c.a.d $r = 3$ :

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(dans l'ordre lexicographique).

La matrice génératrice de $C_2 = C_1^{\perp}$ est donnée par des vecteurs $\perp$ à $C_1$. Comme un vecteur de $C_1$ satisfait $H_1 \vec{x} = \vec{0}$ les lignes de $H$ sont 3 vecteurs $\perp$ à $C_1$. Notons que $C_1$ est de dimension 4 donc $C_1^{\perp}$ est de dimension $7 - 4 = 3$. Donc il suffit de prendre les 3 lignes de $H_1$ comme matrice génératrice de $C_1^{\perp}$ :

$$G_2 = H_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les mots de code de $C_2$ sont donnés par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix}$$

avec $(u_1, u_2, u_3) \in \{0,1\}^3$. Pour montrer que $C_2 \subset C_1$, il suffit de montrer que (vérifiez !)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(où on prend les sommes mod 2 comme d'habitude)

Finalement $C_1$ corrige 1 erreur car toutes paires de colonnes de $H_1$ sont indép et la 3ième est combinaison linéaire des deux premières et donc $d = 3$ ($\Rightarrow t = 1$).

De plus $C_2^{\perp} = (C_1^{\perp})^{\perp} = C_1$ et corrige aussi 1 erreur.

b) Le code CSS$(C_2, C_1)$ possède les paramètres :

$n = 7$ (longueur) ; $\dim \mathcal{H} = 2^7$.

$K_1 - K_2 = \dim C_1 - \dim C_2 = 4 - 3 = 1$. Le code est un s-esp vect de $\mathcal{H}$ de dimension $2^1 = 2$. Le code corrige $t = 1$ erreur.

Mots de Code :

La classe d'équivalence de $x = (0,0,0,0,0,0,0) \in C_1$ est :

$$|0\rangle_{Steane} = \frac{1}{\sqrt{|C_2|}} \sum_{y \in C_2} |y\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \Big\{ |0000000\rangle + |1001101\rangle + |0101011\rangle + |0010111\rangle + |0111100\rangle + |1011010\rangle + |1100110\rangle + |1110001\rangle \Big\}$$

on a utilisé la liste des 8 mots de code de $C_2$ donnés page 8.

Avec $x = (1,1,1,1,1,1,1) \in C_1$ (vérifiez) on a un mot de $C_1$ qui n'est pas dans $C_2$. Sa classe d'équivalence donne l'autre vecteur indépendant du code de Steane :

$$|1\rangle_{Steane} = \frac{1}{\sqrt{8}} \{ |1111111\rangle + |0110010\rangle + |1010100\rangle$$

$$+ |1101000\rangle + |1100011\rangle + |0100101\rangle$$

$$+ |0011001\rangle + |0001110\rangle \} .$$

Un mot de code général est (s. esp. vect de dim 2).

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle_{Steane} + \beta |1\rangle_{Steane}$$

avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Le code utilise 7 qubit pour corriger $t=1$ erreur sur un qubit.