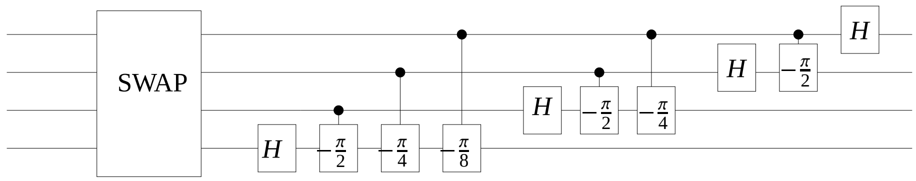
TRAITEMENT QUANTIQUE DE L"INFORMATION II - SOLUTION SERIE 8

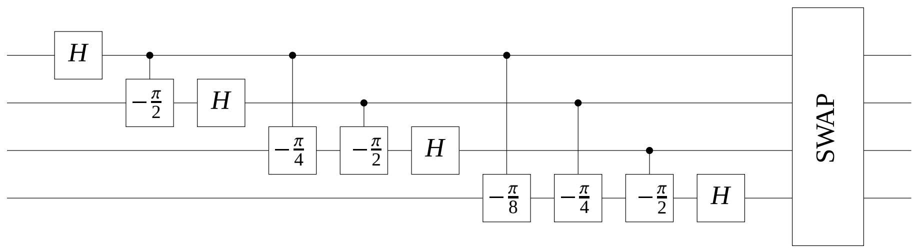
Exercice 1 :

Pour $m = 4$ la QFT est :



Notez que l'adjoint d'une matrice unitaite est égal à l'inverse de cette matrice. Si cette matrice est un opérateur d'évolution, du point de vue physique cette inverse (ou adjoint) est l'évolution temporelle renversée.

L'inverse de H est H lui-même. L'inverse des phases gates sont les phases gates avec l'angle opposé. L'inverse de SWAP est SWAP lui-même. Donc $(\mathrm{QFT})^+$ est donné par le circuit :



Exercice 2 :

(a) Après les portes de Hadamard l'état est :

$$H^{\otimes t}|\underbrace{o\cdots o}_{t \text{ fois}}\rangle \otimes |u\rangle = \frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1\cdots b_t}|b_1\cdots b_t\rangle \otimes |u\rangle.$$

(b) Appliquons les portes U^{2^j} controllées. Pour $U^{2^0} = U$ on a

$$\begin{aligned} c-U|b_0\rangle \otimes |u\rangle &= |b_0\rangle \otimes U^{b_0}|u\rangle \\ &= \exp(2\pi i\phi b_0)|b_0\rangle \otimes |u\rangle. \end{aligned}$$

Pour $U^{2^1} = U^2$ on a :

$$c-U^2|b_1\rangle \otimes |u\rangle = \exp(2\pi i\phi b_1)|b_1\rangle \otimes |u\rangle,$$

etc...

Donc à la sortie des portes de controles, on trouve lètat :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_0\cdots b_{t-1}}\{\exp 2\pi i\phi(b_0 + 2b_1 + \cdots + 2^{t-1}b_{t-1})\}..|b_1\cdots b_t\rangle \otimes |u\rangle,$$

La phase dans l'exponentielle peut s'écrive :

$$\begin{aligned}
&\phi(b_0 + 2b_1 + \cdots + 2^{t-1}b_{t-1}) \\
&= \frac{1}{2^t}(\phi(2^t)(b_0 + 2b_1 + \cdots + 2^{t-1}b_{t-1}) \\
&= \frac{1}{2^t}2^t\phi.b,
\end{aligned}$$

où $2^t\phi = \phi_t + 2\phi_{t-1} + \cdots 2^t\phi_1$ et $b = b_0 + 2b_1 + \cdots + 2^{t-1}b_{t-1}$. Donc on trouve :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1\cdots b_t}\exp(\frac{2\pi i}{2^t}(2^t\phi.b))|b_1\cdots b_t\rangle\otimes|u\rangle.$$

On reconnait que cette expression n'est rien d'autre que

$$(\mathrm{QFT})|2^t\phi\rangle\otimes|u\rangle.$$

Après la $(\mathrm{QFT})^\dagger$ on trouve l'état final

$$|2^t\phi\rangle\otimes|u\rangle.$$

Avec une mesure du premier registre on determine $|2^t\phi\rangle$ avec probabilité 1 et donc on a accès à l'entier $2^t\phi$. A partir de cet entier on déduit ϕ lui-même.