TRAITEMENT QUANTIQUE DE L"INFORMATION - SOLUTIONS SERIE 7

Exercice 1 :

(a)

1. $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc

$$R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

2. La porte de Hadamard est comme d'habitude $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Pour l'Hamiltonian on a :

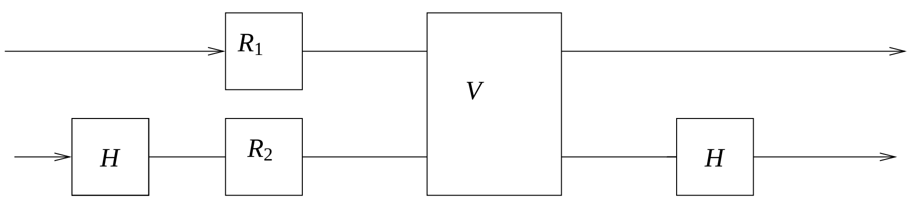
$$\mathcal{H} = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Si on laisse évoluer pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$ on trouve

$$V = \exp(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}) = \exp(-\frac{i\pi}{4J\hbar}\mathcal{H}) = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow U = \exp(-i\frac{\pi}{4}). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Le produit des matrices correspond au circuit suivant :



Sur le dessin l'état $|\psi\rangle$ entre par la gauche et la sortie est á droite $(\mathbb{1} \otimes H)U(R_1 \otimes R_2)(\mathbb{1} \otimes H)|\psi\rangle$.
Calculons le produit

$$R_1 \otimes R_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$U(R_1\otimes R_2) = e^{-i\frac{3\pi}{4}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$= e^{-i\frac{3\pi}{4}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$\mathbb{1}\otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right),$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right),$$

finalement on trouve

$$(\mathbb{1}\otimes H)(U(R_1\otimes R_2))(\mathbb{1}\otimes H) = e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{array}\right).$$

Cette matrice est égale á

$$e^{-i\frac{3\pi}{4}}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}$$
$$= e^{-i\frac{3\pi}{4}}\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\otimes\sigma_x - \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\otimes\mathbb{1}\}$$
$$= e^{-i\frac{3\pi}{4}}\{-|0\rangle\langle 0|\otimes\sigma_x + |1\rangle\langle 1|\otimes\mathbb{1}\}.$$

Cette operation est une sorte de CNOT (mais par le CNOT standard).

Remarque : Pour obtenir la porte CNOT standard il faut utiliser des rotations avec un autre signe (c.a.d d'angle opposé) :

$$R_1 = \exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^2}{2}) \text{ et } R_2 = \exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^2}{2}).$$

On obtient alors (si on ne fait pas d'ereurs de signes !)

$$\begin{aligned}(\mathbb{1}\otimes H)(U(R_1\otimes R_2))(\mathbb{1}\otimes H) &= e^{i\frac{3\pi}{4}}\{|0\rangle\langle 0|\otimes\mathbb{1} + |1\rangle\langle 1|\otimes\sigma_x\} \\ &= e^{i\frac{3\pi}{4}}\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{CNOT standard}}\end{aligned}$$

(c) Soit $R = \exp(-i\pi\frac{\sigma^x}{2})$.

Ici $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(\sigma^x)^2 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned}\exp(i\alpha\sigma^x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(i\alpha)^k}{k!}(\sigma^x)^k \\ &= (\sum_{k=\text{pairs}}\frac{(i\alpha)^k}{k!})\mathbb{1} + (\sum_{k=\text{impairs}}\frac{(i\alpha)^k}{k!})\sigma^x \\ &= \cosh(i\alpha)1 + \sinh(i\alpha)\sigma^x.\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{cases} \cosh(i\alpha) = \frac{ei\alpha + e^{-i\alpha}}{2} = \cosh(\alpha) \text{ et} \\ \sinh(i\alpha) = \frac{ei\alpha - e^{-i\alpha}}{2} = i\sinh(\alpha). \end{cases}$$

Ainsi on obtient (une formule d'Euler généralisée) :

$$\exp(i\alpha\sigma^x) = \cos\alpha.\mathbb{1} + i\sin\alpha.\sigma^x.$$

Si $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ on a : $R = -i\sigma^x = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Finalement

$$R\otimes 1 = -i\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

et on vérifie l'identité de la donnée en faisant le produit des matrices 4×4.

Interprétation physique de l'identité : On prend un état initial $|\psi\rangle$ que l'on laisse évoluer pendant un temps t. Puis on envoie un pulse (rotation d'angle π autour de x). Ensuite on laisse evoluer à nouveau pendant un temps t et on envoie un dernier pulse. L'état final obtenu n'est autre que l'état initial $|\psi\rangle$. La durée totale du processus est approximativement $2t$ car la durée des pulses est en général négligeable par rapport à t. Ainsi en insérant les pulses au bon moment l'état des spins est réajuster dans l'état initial. Cette identité est à la base d'une technique expérimentale dite de "refocusing" utilisée en RMN (et dans le calcul quantique).