TRAITEMENT QUANTIQUE DE L' INFORMATION II. SOLUTION SERIE 3

EXERCICE 1 :

(a) Prendre b=0 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0}^{1}|c\rangle.$$

Prendre b=1 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0}^{1}(-1)^c|c\rangle.$$

Pour $m = 2$:

$$\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|0_2\rangle = H \otimes H|00\rangle &= H \otimes H|0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= H|0\rangle \otimes H|0\rangle \\
&= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2})^2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle).
\end{aligned}$$

Pour $m = 3$ procéder de la $\hat{m}$ maniere.

$$\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|b_1 b_2\rangle &= H|b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c_1}(-1)^{b_1 c_1}|c_1\rangle \otimes \sum_{c_2}(-1)^{b_2 c_2}|c_2\rangle \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \sum_{c_1, c_2}(-1)^{b_1 c_1}(-1)^{b_2 c_2}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \sum_{c_1 c_2}(-1)^{b_1 c_1 + b_2 c_2}|c_1 c_2\rangle.
\end{aligned}$$

(b) Deutsch-Josza pour $m = 2$. On a

$$\begin{aligned}
|000\rangle \rightarrow H^{\otimes 2} \otimes X|000\rangle \\
&= H|0\rangle \otimes H|0\rangle \otimes |1\rangle \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle) \otimes |1\rangle.
\end{aligned}$$

En suite au applique H encore une fois :

$$\rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}}^{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle) \otimes (\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}).$$

En suite en applique l'oracle à chaque terme du type :

$$|xy\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|xy\rangle|0\rangle - |xy\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\text{oracle}) \rightarrow \ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|xy\rangle|f(xy)\rangle - |xy\rangle|\overline{f(x,y)}\rangle) \\ = \ & \frac{1}{\sqrt{2}}|xy\rangle \otimes (|f(xy) - \overline{f(xy)}\rangle).\end{aligned}$$

Si $f(xy) = 0$ ceci vaut

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|xy\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Si $f(xy) = 1$ ceci vaut

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|xy\rangle \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Donc dans tous les cas ceci vaut

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{f(xy)}|xy\rangle \otimes \frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi aprés l'oracle l' état est :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\Big((-1)^{f(00)}|00\rangle|00\rangle + (-1)^{f(10)}|10\rangle + (-1)^{f(01)}|01\rangle + (-1)^{f(11)}|11\rangle\Big) \otimes (\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}).$$

Appliquons les deux portes de Hadamard finales. On obbient l'état :

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\Big((-1)^{f(00)}H|0\rangle H|0\rangle + (-1)^{f(10)}H|1\rangle H|0\rangle + (-1)^{f(01)}H|0\rangle H|1\rangle + (-1)^{f(11)}H|1\rangle H|1\rangle\Big).$$

On a :

$$H|0\rangle H|0\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle).$$

$$H|1\rangle H|0\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle).$$

$$H|0\rangle H|1\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(|00\rangle - |10\rangle + |01\rangle - |11\rangle).$$

$$H|1\rangle H|1\rangle = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(|00\rangle - |10\rangle - |01\rangle + |11\rangle).$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\Big\{|00\rangle((-1)^{f(00)} + (-1)^{f(10)} + (-1)^{f(01)} + (-1)^{f(11)})\\
&+ |10\rangle((-1)^{f(00)} + (-1)^{f(10)} - (-1)^{f(01)} - (-1)^{f(11)})\\
&+ |01\rangle((-1)^{f(00)} - (-1)^{f(10)} + (-1)^{f(01)} - (-1)^{f(11)})\\
&+ |11\rangle((-1)^{f(00)} - (-1)^{f(10)} - (-1)^{f(01)} + (-1)^{f(11)})\Big\} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

On fait maintenmant une mesure sur les deux premiers qubits. Comme $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$ est totalment factoriré on peut oublier ce qubit auxiliaire. La probabilité d'obtenir $|00\rangle$ est :

$$\frac{1}{16}\Big|(-1)^{f(0,0)} + (-1)^{f(1,0)} + (-1)^{f(0,1)} + (-1)^{f(1,1)}\Big|^2.$$

Si f est constante cette probabilité vaut $\frac{1}{16}|4|^2 = 1$. Si f est balancei cette probabilité vaut 0. Donc en posant une seule question à l'oracle au peut déterminer si f est constante au balancee. Si la mesure donne $|00\rangle$ alors f est constante, sinon f est balancee.

Pour le **probléme de Bernstein et Vazirani** en prend

$$f(xy) = a_1x + a_2y + b.$$

Et il faut trouver a_1 et a_2 en une question á l'oracle.
On a : $f(00) = b$, $f(10) = a_2 + b$, $f(01) = a_1 + b$ et $f(11) = a_1 + a_2 + b$. Donc le coefficient de $|00\rangle$ rout :

$$\{1 + (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} + (-1)^{a_1+a_2}\} = \begin{cases} (-1)^b & \text{si } a_1a_2 = 00,\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

De meme on remarque :

$$\{1 + (-1)^{a_1} - (-1)^{a_2} - (-1)^{a_1+a_2}\} = \begin{cases} (-1)^b & \text{si } a_1a_2 = 10,\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

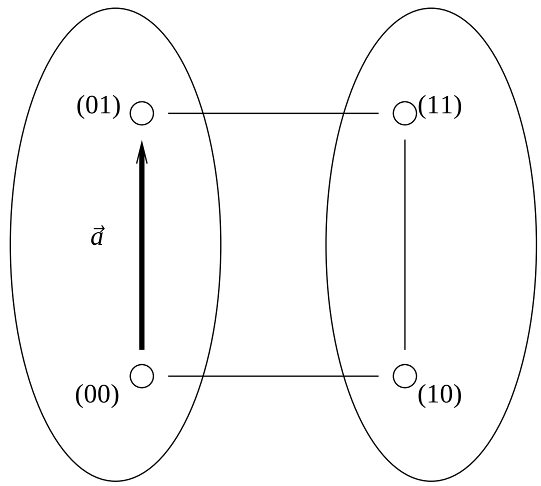
$$\{1 - (-1)^{a_1} + (-1)^{a_2} - (-1)^{a_1+a_2}\} = \begin{cases} (-1)^b & \text{si } a_1a_2 = 01,\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

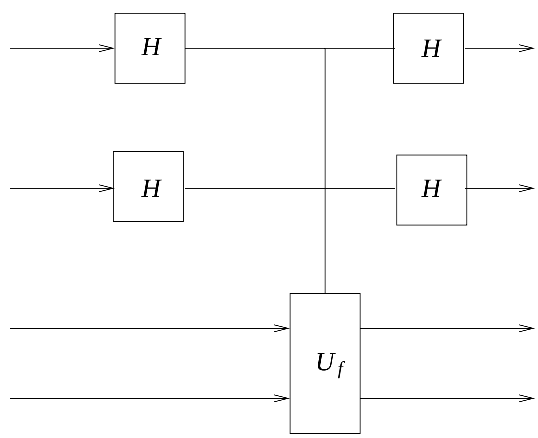
$$\{1 - (-1)^{a_1} - (-1)^{a_2} + (-1)^{a_1+a_2}\} = \begin{cases} (-1)^b & \text{si } a_1a_2 = 11,\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases}$$

Ainsi juste avant la mesure on obtien l'état

$$(-1)^b|a_1a_2\rangle \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

la mesure donne $|a_1a_2\rangle$ avec prob= $|(-1)^b|^2 = 1$. Remarquablement on trouve les valeurs de a_1a_2 avec probabilité 1.





EXERCICE 2 :

Ici la carré est partitioné comme suit :
Soit $X = \{\alpha, \beta\}$. On a $f(00) = f(01) = \alpha$ et $f(10) = f(11) = \beta$.
L'état initial est $|0000\rangle$. Aprés les premières portes de Hadamard :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (|0000\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle + |1100\rangle).$$

Aprés l'oracle :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (|00\rangle \otimes |f(00)\rangle + |01\rangle \otimes |f(01)\rangle + |10\rangle \otimes |f(10)\rangle + |11\rangle \otimes |f(11)\rangle).$$

Ce qui est égal à

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2(|00\rangle|\alpha\rangle + |10\rangle|\alpha\rangle + |10\rangle|\beta\rangle + |11\rangle|\beta\rangle$$
$$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2(|\alpha\rangle(|00\rangle + |10\rangle) + |\beta\rangle(|10\rangle + |11\rangle).$$

On applique les deux dernières portes de Hadamard :

$$\begin{aligned}(\frac{1}{\sqrt{2}})^2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2\Big\{&(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes |\alpha\rangle\\ &+ (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \otimes |\alpha\rangle\\ &+ (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \otimes |\beta\rangle\\ &+ (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \otimes |\beta\rangle\Big\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\{|00\rangle \otimes (2|\alpha\rangle + 2|\beta\rangle) + |10\rangle \otimes (2|\alpha\rangle - 2|\beta\rangle)\}.$$

Remarquez que les autres termes correspondant á $|01\rangle$ et $|11\rangle$ donnent zéro.
La mesure des deux premiers qubits réduit l'état á $|00\rangle$ au $|10\rangle$ (pour les deux premiers qubits). Donc on obtient les vecteurs (00) ou (10) $\perp$ à $\vec{a} = (01)$.
Dès que l'on obtient (01) (en répétant l'expérience si besoin est c.a.d au cas ou manque de chance on tombe sur (00) ...) on résod l'équation (condition d'orthogobalité)

$$a_1.1 + a_2.0 = 0,$$

qui possde la solution non triviale unique $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.