Solution Série 10

Exercice 1.

a) Pour la première source la matrice densité est :

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et pour la deuxième :

$$\rho = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} - \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} - \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nous voyons que la matrice densité peut correspondre à plusieurs préparations physiques de la source.

b) Ici on a la matrice densité

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

<u>Décomposition spectrale</u> : il faut calculer les v.p et vect propres :

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \lambda v_1 \\ \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}-\lambda\right) - \frac{1}{16} = 0.$$

$$\Rightarrow (3-4\lambda)(1-4\lambda) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (4\lambda)^2 - 4\lambda(3+1) + 3 - 1 = 0$$

$$(4\lambda)^2 - 4.(4\lambda) + 2 = 0$$

$$4\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} \Rightarrow \cancel{\lambda_\pm = \frac{1}{4}} \; \lambda_\pm = \frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)v_1 \Rightarrow \text{si } v_1 = 1 \text{ on a } v_2 = 4\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ correspond à } \lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et $\frac{3}{4} v_1 + \frac{1}{4} v_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) v_1$

$\Rightarrow$ si $v_1 = 1$ alors $v_2 = -1 - 2\sqrt{2}$.

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ correspond à $\lambda_- = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Normalisons les vecteurs :</u>

$\lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ correspond à $\frac{1}{\sqrt{1 + (2\sqrt{2} - 1)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = |v_+\rangle$

$\lambda_- = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{1 + (2\sqrt{2} + 1)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = |v_-\rangle$.

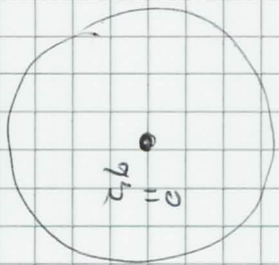
En notation de Dirac

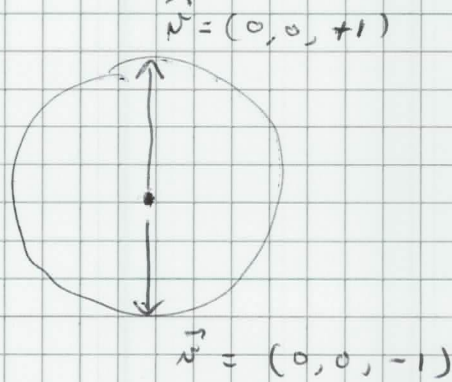
$$\rho = \lambda_+ |v_+\rangle\langle v_+| + \lambda_- |v_-\rangle\langle v_-|.$$

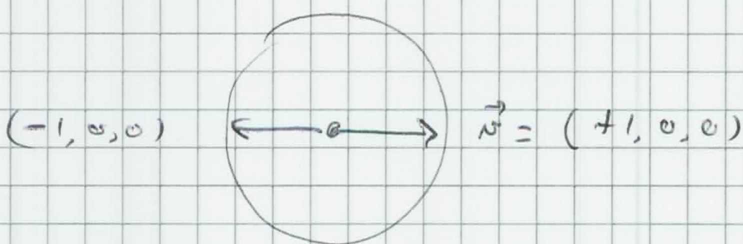
(ci-dessus la méthode générale est correct ; les calculs ne sont pas garantis).
Vérifiez !

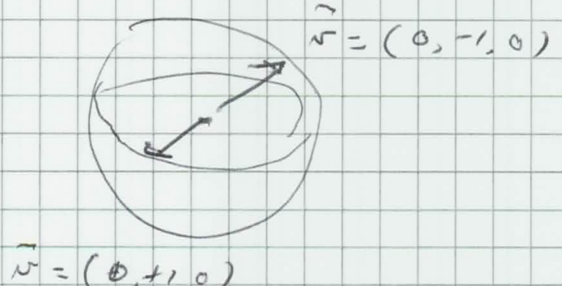
Exercício 2.

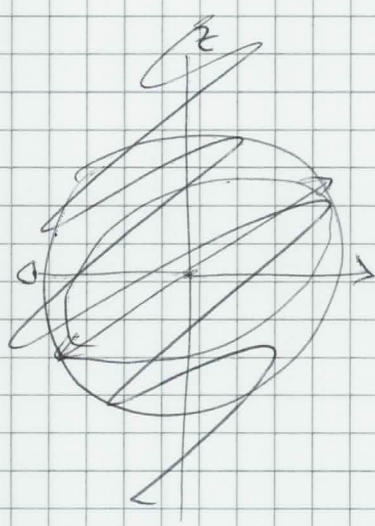
a)

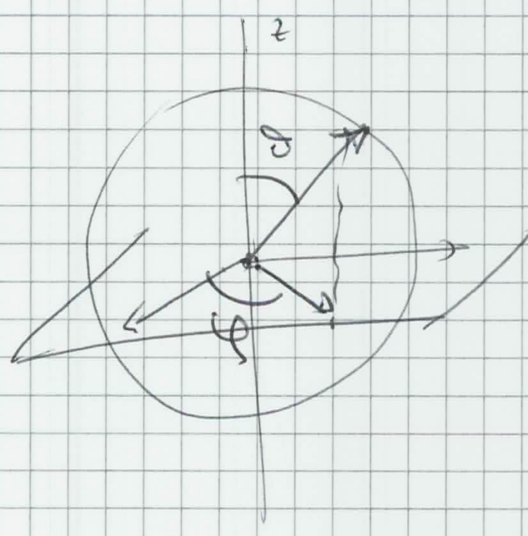


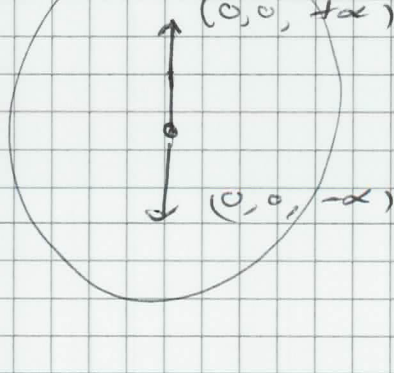












$0 < \alpha < 1.$

b) Pour avoir un état pur il faut avoir

$$|\vec{n}| = 1 .$$

Donc les $\overbrace{\text{~~premiers~~}}^{n^\circ\ 2,3,4,5}$ sont des états purs, l'état correspondant est :

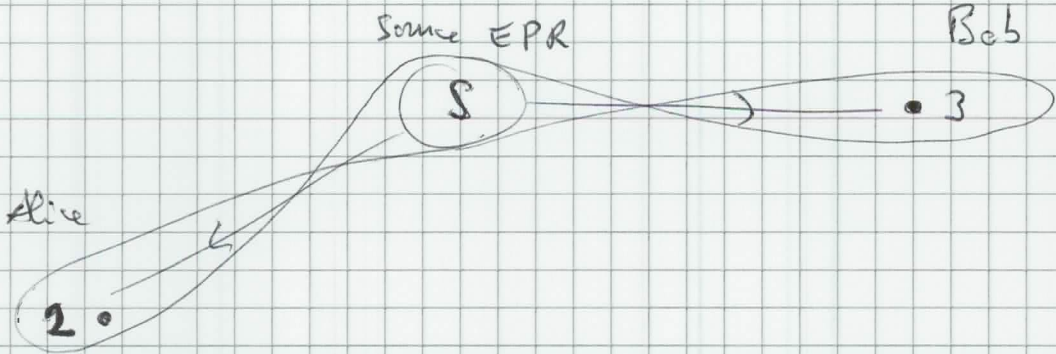
$$|0\rangle\ ,\ |1\rangle \iff (0, 0, \pm 1)$$

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \text{ et } \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \iff (\pm 1, 0, 0)$$

$$\frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \text{ et } \frac{i|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \iff (0, \pm 1, 0).$$

$$e^{i\varphi/2}\cos\theta\,|0\rangle + e^{-i\varphi/2}\sin\theta\,|1\rangle \iff (\cos\theta\sin\varphi ; \cos\theta\cos\varphi ; \sin\theta).$$

Exercice 3.



1. $$|\psi\rangle_{tot} = |\varphi\rangle_1 \otimes \frac{|\uparrow\uparrow\rangle_{23} + |\downarrow\downarrow\rangle_{23}}{\sqrt{2}}$$

a) $$\rho_{tot} = |\psi_{tot}\rangle\langle\psi_{tot}|$$

$$= |\varphi\rangle_1\langle\varphi|_1 \otimes \frac{1}{2}\Big\{ |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\uparrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| \Big\}_{23}$$

On trace sur Bob et il reste :

$$\rho_{Al} = \mathrm{Tr}_3\, \rho_{tot} = |\varphi\rangle_1\langle\varphi_1| \otimes \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle_2\langle\uparrow|_2 + |\downarrow\rangle_2\langle\downarrow|_2 \right).$$

Puis on trace sur sur Alice et il reste :

$$\rho_{Bob} = \mathrm{Tr}_{12}\, \rho_{tot} = \underbrace{\langle\varphi|\varphi\rangle_1}_{1} \cdot \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle_3\langle\uparrow|_3 + |\downarrow\rangle_3\langle\downarrow|_3 \right).$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}_3$$

Bob possède un état de mélange complètement aléatoire.

Note : Alice possède $|\varphi\rangle_1\langle\varphi_1| \otimes \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}_2$

b) Si Alice applique U_{12} dans son labo, la matrice densité totale devient :

$$(U_{12} \otimes 1_3)\rho_{tot}(U_{12}^{+} \otimes 1_3) = \rho'_{tot} .$$

Bob lui ~~[illegible]~~ possède l'état

$$\rho'_{Bob} = Tr_{12}\ \rho'_{tot}$$

$$= Tr_{12}\left(U_{12}\ \rho_{tot}\ U_{12}^{+}\right)$$

$$= Tr_{12}\ (U_{12}^{+}\ U_{12})\ \rho_{tot} \qquad \text{(cyclicité)}$$

$$= Tr_{12}\ \rho_{tot} \qquad \text{(unitarité)}$$

$$= \rho_{Bob} \quad \text{calculé auparavant}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}_3 .$$

Bob ne peut pas détecter l'opération d'Alice.

c) Maintenant Alice fait encore une mesure de base $P_{12}^{(m)}$; $m = 1, 2, 3, 4$. Le nouvel état est :

$$\frac{P_{12}^{(m)} U_{12}\, \rho_{tot}\, U_{12}^{+} P_{12}^{(m)}}{\mathrm{Tr}\, P_{12}^{(m)} U_{12}\, \rho_{tot}\, U_{12}^{+} P_{12}^{(m)}} = \rho_{tot}^{(m)}$$

avec $\mathrm{prob}(m) = \mathrm{Tr}\, P_{12}^{(m)} U_{12}\, \rho_{tot}\, U_{12}^{+} P_{12}^{(m)}$.

Puisque le résultat de la mesure (ce résultat est m) est connu seulement d'Alice (en admettant qu'elle ne le transmet pas à Bob) ; pour Bob la nouvelle matrice densité est donnée par :

$$\rho''_{Bob} = \sum_m \mathrm{prob}(m)\, \mathrm{Tr}_{12}\, \rho_{tot}^{(m)}$$

$$= \sum_m \mathrm{prob}(m) \frac{\mathrm{Tr}_{12}\, P_{12}^{(m)} U_{12}\, \rho_{tot}\, U_{12}^{+} P_{12}^{(m)}}{\mathrm{prob}(m)}$$

$$= \sum_m \mathrm{Tr}_{12}\, P_{12}^{(m)} \left(U_{12}\, \rho_{tot}\, U_{12}^{+}\right) P_{12}^{(m)}$$

Utilisant la cyclicité de la trace, $P_{12}^{(m)\,2} = P_{12}^{(m)}$ et $\sum_{m=1}^{4} P_{12}^{(m)} = \mathbb{1}_1 \otimes \mathbb{1}_2$ on trouve $\rho''_{Bob} = \rho'_{Bob} = \rho_{Bob}$.

d) Ainsi tant qu'il n'y a pas de communication entre Alice et Bob, Bob ne peut pas détecter la présence d'Alice et ne peut pas détecter ses opérations qu'elles soient unitaires et qu'elles soient des mesures.

C'est pour cela que dans le protocole de téléportation il y a une phase de communication classique entre Alice et Bob. ~~Ce processus~~ [Cette phase de communication ne peut pas s'opérer à vitesse plus grande que celle de la lumière]. Les états intriqués peuvent aider ou assister à la communication entre Alice et Bob mais ils ne peuvent servir eux même à transporter l'information.