1 Traitement quantique de l'information II : solution de la série 1

1.1 Interféromètre de Mach-Zehnder

On admettra que les réflections sur les miroirs produisent un déphasage de i.

1.
L'état initial est : $|h\rangle$
Après le 1$^{\text{er}}$ miroir semi-transparent : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i\,|v\rangle)$.
Après les deux déphaseurs : : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|h\rangle + ie^{i\varphi_2}\,|v\rangle)$.
Après les miroirs réflichissants : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|v\rangle - ie^{i\varphi_2}\,|h\rangle)$.
Après 2$^{\text{ém}}$ miroir semi-transparent :

$$\begin{aligned}
&\frac{ie^{i\varphi_1}}{2}(i\,|h\rangle + |v\rangle) - \frac{e^{i\varphi_i}}{2}(|h\rangle + i\,|v\rangle) \\
&= \frac{1}{2}[-(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2})\,|h\rangle + i(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})\,|v\rangle] \\
&= -\frac{e^{i\varphi_1}}{2}[(1 + e^{i\Delta\varphi})\,|h\rangle - i(1 - e^{i\Delta\varphi})\,|v\rangle] \\
&= |\psi_{\text{fin}}\rangle\,,
\end{aligned}$$

avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

2
La probabilite de détection en D_1 est

$$\begin{aligned}
\text{prob}(D_1) &= |\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 \\
&= \frac{1}{4}|1 + e^{i\Delta\varphi}|^2 \\
&= \frac{1}{4}|e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}|^2 \\
&= \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}).
\end{aligned}$$

Probabilite de détection en D_2 est $|\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 = \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$. Ces probabilités dépendent seulement de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, donc seules les differénces de phases sont mesurables et non pas les "phases absolues ou globales".

3.

$$|\Psi_{\text{initial}}\rangle \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow |\Psi_{\text{fin}}\rangle$$

Mesure dans détecteurs

FIG. 1 – circuit correspondant à l'interféromètre

- Miroir semi-transparent $= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ (matrice unitaire)
- Miroir réflichissant $= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ (matrice unitaire)
- Déphaseurs (cristaux) $= \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$ (matrices unitaires)

$$\text{produit} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

Pour le circuit correspondant voir figure 1.1 :

Remarque : On peut aussi vérifier :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}_{\frac{\pi}{2}\text{shift}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{H (Hadamard)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Donc pour realiser une porte de Hadamard physiquement on peut utiliser

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}}_{Beamersplitter} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{-\frac{\pi}{2}\text{shift}}.$$

D'autrepart

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{i}_{\text{phase globale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{NOT \text{ or } X}.$$

Le circuit ci-dessus est aussi équivalent à

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{matrix}} \rightarrow \boxed{NOT} \rightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \boxed{\tfrac{\pi}{2}\text{ shift}} \downarrow$$

Mesure dans base $\{|0\rangle,\ |1\rangle\}$

FIG. 2 – circuit équivalent

1.2 Photons et Particles Classiques

1.

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\theta\rangle &= (\sin\alpha\langle x| + \langle y|\cos\alpha)(\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle) \\
&= \sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta \\
&= \cos(\theta - \alpha).
\end{aligned}$$

Donc $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2 = \cos^2(\theta - \alpha)$. Et

$$\begin{aligned}
\langle\alpha_\perp|\theta\rangle &= (-\cos\alpha\langle x| + \sin\alpha\langle y|)(\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle) \\
&= -\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta \\
&= \sin(\alpha - \theta).
\end{aligned}$$

Donc $|\langle\alpha_\perp|\theta\rangle|^2 = \sin^2(\theta - \alpha)$.

2.
L' état est intriqué, c.a.d qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit tensoriel :

$$\sin\theta|x, 1\rangle + \cos\theta|y, z\rangle = |\psi\rangle$$

Prob d'oserver photon sur traj 1 ou 2 : prendre les projections $P_1 = I \otimes |1\rangle\langle 1|$ et $P_2 = I \otimes |2\rangle\langle 2|$ au I est l'identité par la polarization ($I = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|$).

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(1) = \langle\psi|P_1|\psi\rangle &= (\sin\theta\langle x, 1| + \cos\theta\langle 2, y|)I \otimes |1\rangle\langle 1|(\sin\theta|x, 1\rangle + \cos\theta|y, 2\rangle) \\
&= \sin^2\theta\langle x|I|x\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle \\
&= \sin^2\theta.
\end{aligned}$$

De même Prob(2)=$\langle\psi|P_2|\psi\rangle = \cos^2\theta$.

3.
Aprés la deuxième lame biréfringente l'état est $|\theta, 1\rangle$ cas elle agit de facon symétrique par rapport à la première (renversement du temps). On peut oublier le degré de

liberté de trajectorie, et représenter l'état par $|\theta\rangle = \sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle$.

Prob de détection=Prob ($|\alpha\rangle$)= $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2 = cos^2(\theta - \alpha)$.

4.
Si on "remplace le photon par un particule classique" :

- avec prob $sin^2\theta$ il passe par la trajectoire inférieure et sa polarization est horizantale = $|x\rangle$. Donce apré la deuxiéme lame biréfrégente son état est $|x\rangle$ et la prob de détection est $|\langle\alpha|x\rangle|^2 = sin^2\alpha$. Prob totale de cet événement $= sin^2\theta sin^2\alpha$.

- avec prob $cos^2\theta$ il passe par traj supérieure est sa pol est verticale= $|y\rangle$. Donc après la deuxiéme lame biréfrégente son état est $|y\rangle$ et la prob de détection est $|\langle\alpha|y\rangle|^2 = cos^2\alpha$. Prob totale de l'évènement $= cos^2\theta cos^2\alpha$.

Finalement on obtient :

$$\text{Prob détection} = sin^2\theta sin^2\alpha + cos^2\theta cos^2\alpha$$

La grande différence avec la MQ est que le terme d ínterférence des deux chemins possibles est absent.
Remarque : Ce terme d'interférence est obtenu en développant le résultat quantique (de la question 3)

$$\cos^2(\theta - \alpha) = sin^2\theta sin^2\alpha + cos^2\theta cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha\sin\theta$$

Il s'agit du dernier terme.