

# 1 Traitement quantique de l'information II : solution de la série 1

## 1.1 Interféromètre de Mach-Zehnder

On admettra que les réflexions sur les miroirs produisent un déphasage de  $i$ .

1.

L'état initial est :  $|h\rangle$

Après le 1<sup>er</sup> miroir semi-transparent :  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i|v\rangle)$ .

Après les deux déphaseurs :  $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}|h\rangle + ie^{i\varphi_2}|v\rangle)$ .

Après les miroirs réfléchissants :  $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}|v\rangle - ie^{i\varphi_2}|h\rangle)$ .

Après 2<sup>ém</sup> miroir semi-transparent :

$$\begin{aligned} & \frac{ie^{i\varphi_1}}{2}(i|h\rangle + |v\rangle) - \frac{e^{i\varphi_2}}{2}(|h\rangle + i|v\rangle) \\ &= \frac{1}{2}[-(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2})|h\rangle + i(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})|v\rangle] \\ &= -\frac{e^{i\varphi_1}}{2}[(1 + e^{i\Delta\varphi})|h\rangle - i(1 - e^{i\Delta\varphi})|v\rangle] \\ &= |\psi_{\text{fin}}\rangle, \end{aligned}$$

avec  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

2

La probabilité de détection en  $D_1$  est

$$\begin{aligned} \text{prob}(D_1) &= |\langle h|\psi_{\text{fin}}\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4}|1 + e^{i\Delta\varphi}|^2 \\ &= \frac{1}{4}|e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}|^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

Probabilité de détection en  $D_2$  est  $|\langle h|\psi_{\text{fin}}\rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ . Ces probabilités dépendent seulement de  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , donc seules les différences de phases sont mesurables et non pas les "phases absolues ou globales".

3.

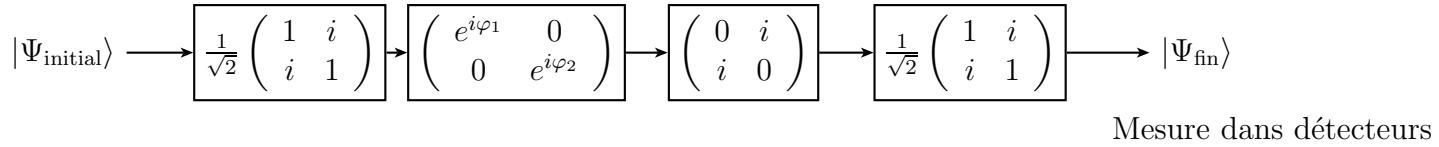


FIG. 1 – circuit correspondant à l'interféromètre

- Miroir semi-transparent =  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  (matrice unitaire)
  - Miroir réfléchissant =  $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  (matrice unitaire)
  - Déphaseurs (cristaux) =  $\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$  (matrices unitaires)
- $$\text{produit} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix}$$

Pour le circuit correspondant voir figure 1.1 :

**Remarque :** On peut aussi vérifier :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}}_{\frac{\pi}{2}\text{shift}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{H \text{ (Hadamard)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Donc pour réaliser une porte de Hadamard physiquement on peut utiliser

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Beamsplitter}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{-\frac{\pi}{2}\text{shift}}.$$

D'autrepart

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{i}_{\text{phase globale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{NOT or X}}.$$

Le circuit ci-dessus est aussi équivalent à

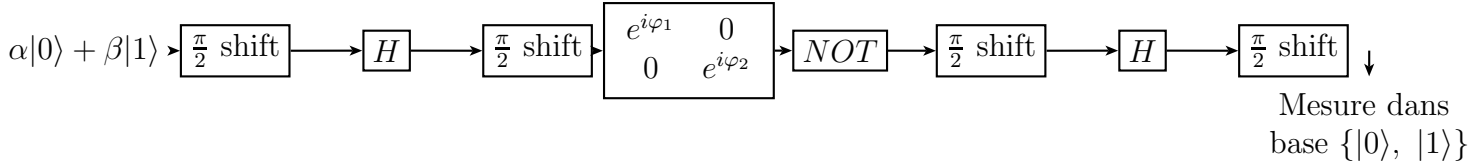


FIG. 2 – circuit équivalent

## 1.2 Photons et Particles Classiques

1.

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha | \theta \rangle &= (\sin \alpha \langle x | + \langle y | \cos \alpha)(\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle) \\
 &= \sin \alpha \sin \theta + \cos \alpha \cos \theta \\
 &= \cos(\theta - \alpha).
 \end{aligned}$$

Donc  $|\langle \alpha | \theta \rangle|^2 = \cos^2(\theta - \alpha)$ . Et

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_{\perp} | \theta \rangle &= (-\cos \alpha \langle x | + \sin \alpha \langle y |)(\sin \theta |x\rangle + \cos \theta |y\rangle) \\
 &= -\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta \\
 &= \sin(\alpha - \theta).
 \end{aligned}$$

Donc  $|\langle \alpha_{\perp} | \theta \rangle|^2 = \sin^2(\theta - \alpha)$ .

2.

L' état est intriqué, c.a.d qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit tensoriel :

$$\sin \theta |x, 1\rangle + \cos \theta |y, z\rangle = |\psi\rangle$$

Prob d'observer photon sur traj 1 ou 2 : prendre les projections  $P_1 = I \otimes |1\rangle\langle 1|$  et  $P_2 = I \otimes |2\rangle\langle 2|$  au  $I$  est l'identité par la polarisation ( $I = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|$ ).

$$\begin{aligned}
 \text{Prob}(1) &= \langle \psi | P_1 | \psi \rangle = (\sin \theta \langle x, 1 | + \cos \theta \langle 2, y |) I \otimes |1\rangle\langle 1| (\sin \theta |x, 1\rangle + \cos \theta |y, 2\rangle) \\
 &= \sin^2 \theta \langle x | I | x \rangle \langle 1 | 1 \rangle \langle 1 | 1 \rangle \\
 &= \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

De même  $\text{Prob}(2) = \langle \psi | P_2 | \psi \rangle = \cos^2 \theta$ .

3.

Après la deuxième lame biréfringente l'état est  $|\theta, 1\rangle$  car elle agit de façon symétrique par rapport à la première (renversement du temps). On peut oublier le degré de

liberté de trajectoire, et représenter l'état par  $|\theta\rangle = \sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle$ .

Prob de détection = Prob ( $|\alpha\rangle$ ) =  $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2 = \cos^2(\theta - \alpha)$ .

4.

Si on "remplace le photon par un particule classique" :

– avec prob  $\sin^2\theta$  il passe par la trajectoire inférieure et sa polarisation est horizontale =  $|x\rangle$ . Donc après la deuxième lame biréfrégente son état est  $|x\rangle$  et la prob de détection est  $|\langle\alpha|x\rangle|^2 = \sin^2\alpha$ . Prob totale de cet événement =  $\sin^2\theta\sin^2\alpha$ .

– avec prob  $\cos^2\theta$  il passe par traj supérieure et sa pol est verticale =  $|y\rangle$ . Donc après la deuxième lame biréfrégente son état est  $|y\rangle$  et la prob de détection est  $|\langle\alpha|y\rangle|^2 = \cos^2\alpha$ . Prob totale de l'évènement =  $\cos^2\theta\cos^2\alpha$ .

Finalement on obtient :

$$\text{Prob détection} = \sin^2\theta\sin^2\alpha + \cos^2\theta\cos^2\alpha$$

La grande différence avec la  $MQ$  est que le terme d'interférence des deux chemins possibles est absent.

**Remarque :** Ce terme d'interférence est obtenu en développant le résultat quantique (de la question 3)

$$\cos^2(\theta - \alpha) = \sin^2\theta\sin^2\alpha + \cos^2\theta\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha\sin\theta$$

Il s'agit du dernier terme.