

TRAITEMENT QUANTIQUE DE L'INFORMATION II : série 7 (22 avril 2010)

Exercice : Identités utiles pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN.

Dans cet exexercice nous prouvons quelques identités utiles à la réalisation expérimentale de la porte CNOT. Elles formeront la base de la discussion du cours, concernant la réalisation expérimentale par RMN des algorithmes de Deutsch-Josza et de Shor (pour 7 à 10 qubits).

On considère deux qubits (par ex. spins $\frac{1}{2}$, systèmes à deux niveaux) et les opérateurs suivants :

- Rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe z pour chaque spin :

$$R_1 = \exp(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^z}{2}) \quad \text{et} \quad R_2 = \exp(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^z}{2})$$

- Porte de Hadamard H .
- L'opérateur dévolution

$$U = \exp(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H})$$

associé à l'hamiltonien d'interaction pour deux spins $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. On laisse évoluer le système pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$.

- Ecrire les matrices R_1 , R_2 , H , \mathcal{H} et U explicitement. Indication : pour calculer les exponentielles des matrices remarquez qu'elles sont diagonales.
- Dessinez le circuit correspondant au produit des matrices

$$(\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H) U (R_1 \otimes R_2) (\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H)$$

puis calculez ce produit et montrez qu'il est égal à la matrice 4×4 de la porte CNOT.

- Soit maintenant $R = \exp(-i\pi\frac{\sigma_1^x}{2})$ la rotation d'angle π du premier spin autour de l'axe x . Calculez cette matrice en utilisant le développement de l'exponentielle (ou une des formules des séries précédentes). Montrez que l'identité suivante est valable pour tout t :

$$(R \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2}) \exp(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H})(R \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2}) \exp(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}) = \mathbb{I}_{4 \times 4}$$

Donnez une interprétation physique de cette identité.