Série 8
Traitement Quantique de l'Information II

1 Transformée de Fourier inverse

Reprendre le circuit de la transformée de Fourier QFT pour $m = 4$ et donner le circuit qui réalise la transformée inverse: $(\mathrm{QFT})^\dagger$.

2 Algorithme pour estimer une phase

Dans cet exercice nous étudions le problème suivant qui joue un rôle important en information quantique. Soit U un opérateur unitaire (qui peut être réaliser par une boîte noire ou un circuit donné). Supposons que U possède un vecteur propre $|u\rangle$ de valeur propre[1] $\exp(2\pi i\varphi)$:

$$U|u\rangle = e^{2\pi i\varphi}|u\rangle .$$

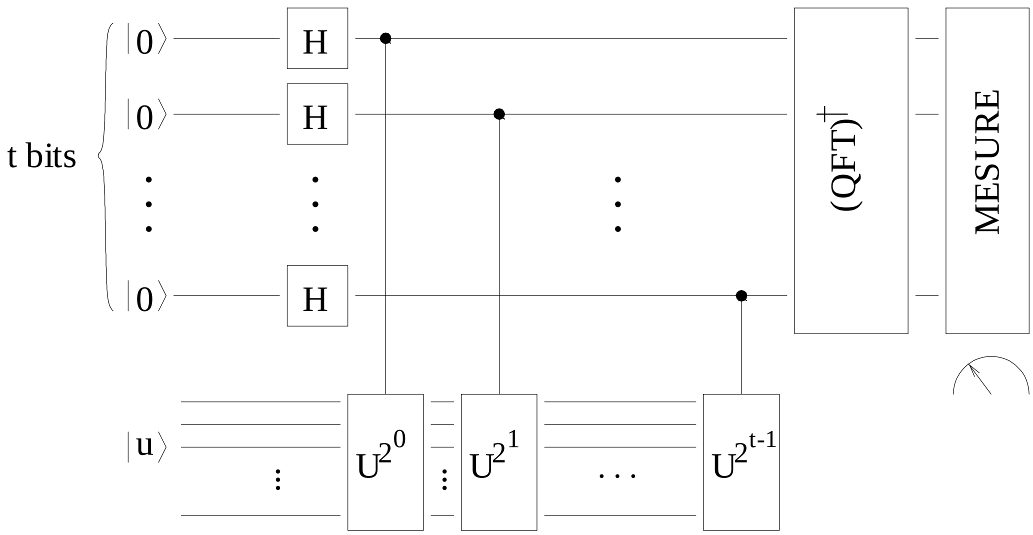
On supposera pour faire simple que φ est un nombre rationnel plus petit que 1 avec exactement t bits. C'est-à-dire

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{4} + ... + \frac{\varphi_t}{2^t}$$

où $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_t \in \{0,1\}$. On suppose aussi que $|u\rangle$ est à disposition (cela ne veut pas forcément dire que $|u\rangle$ est connu, mais juste que l'état quantique est à disposition) et on veut calculer φ.

Le but de cet exercice est de montrer que le circuit suivant permet de calculer φ grâce à une seule expérience, avec probabilité 1.

[1] Notez que les valeurs propres d'un opérateur unitaire sont toujours des nombres complexes de module 1.



a) L'état initial est $\underbrace{|0,...,0\rangle}_{t} \otimes |u\rangle$. Calculez l'état après les portes de Hadamard.

b) Calculez l'effet des portes U^{2^t}-contrôleur.

c) Montrez que l'état après la $(\mathrm{QFT})^\dagger$ est $|2^t\varphi\rangle \otimes |u\rangle$.

d) Comment obtient-on la valeur de φ?