Série 5
Traitement Quantique de l'Information II

1 Réalisation de la porte SWAP

La porte est importante car elle permet d'échanger les q-bits dans un circuit. Elle est définie dans la base computationelle par

$$\mathrm{SWAP}\,|x, y\rangle = |y, x\rangle$$

a) Démontrez que cette opération est unitaire et donnez sa matrice correspondante.

b) Nous allons montrer qu'elle peut être réalisée grâce à l'Hamiltonien de Heisenberg (voir série 4)

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

Calculez l'opérateur d'évolution des deux spins

$$U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$$

et montrez que l'on obtient SWAP pour $t_0 = \pi/4J$

Formules utiles (à démontrer):

- Pour une matrice par bloc

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(A) & 0 \\ \hline 0 & \exp(B) \end{array}\right)$$

- Formule d'Euler généralisée

$$\exp\left(i\alpha\sigma^k\right) = I\cos\alpha + i\sigma^k\sin\alpha$$

c) On peut aussi réaliser SWAP grâce à 3 portes CNOT. Donnez le circuit correspondant.

Remarque: réciproquement on peut réaliser CNOT à partir de $\sqrt{\mathrm{SWAP}}$ et des manipulations à 1 q-bit. Ainsi $\sqrt{\mathrm{SWAP}}$ joue aussi le rôle de porte universelle (mais pas SWAP lui-même.

Dans la prochaine série nous verrons comment réaliser CNOT avec un Hamiltonien de "type Heisenberg".