Série 4
Traitement Quantique de l'Information II

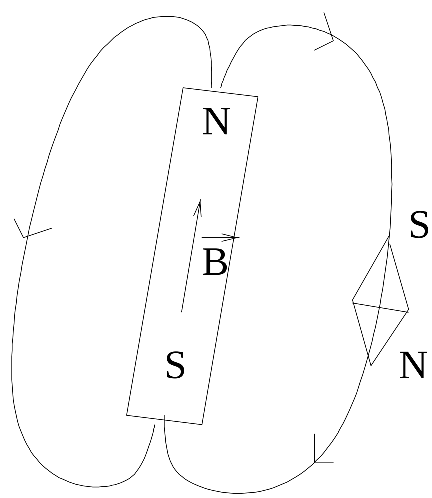
1 Hamiltonien de Heisenberg

1.1 Rappel

Nous avons vu que l'énergie d'interaction d'un moment magnétique $\vec{M}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par

$$H = -\vec{B} \cdot \vec{M}$$

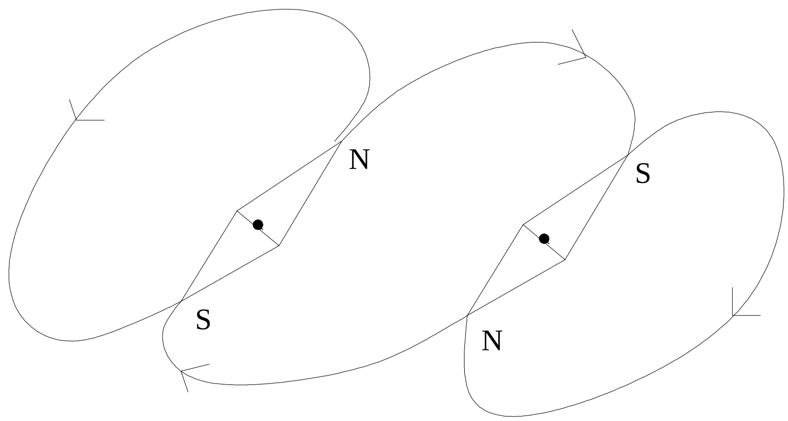
La différence entre cette quantité et son minimum est l'énergie qu'il faut fournir pour faire dévier la boussole de son état d'équilibre (voir figure).



En mécanique quantique le moment magnétique d'un spin 1/2 est $\vec{M} = g\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ où $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ est le vecteur des matrices de Pauli. Donc H est une matrice (hermitienne) 2×2.

1.2 Interaction entre deux moments magnétiques

Prenons maintenant deux moments magnétiques et supposons pour le moment qu'il n'y ait aucun champ magnétique externe. Leur énergie d'interaction est proportionnelle à $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$. Le minimum est atteint pour la configuration d'équilibre de la figure qui correspond à prendre $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ opposés.



Notez que $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$ est la fonction la plus simple des deux vecteurs $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ qui soit invariante sous les rotations.

En M.Q. pour deux spins 1/2 on a $\vec{M}_1 = g_1 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_1$ et $\vec{M}_2 = g_2 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_2$. On posera donc pour l'hamiltonien d'interaction

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

C'est l'hamiltonien de Heisenberg. L'espace de Hilbert des deux spins (ou deux q-bits!) est $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ et la formule ci-dessus signifie en fait

$$H = \hbar J \left(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \right)$$

L'hamiltonien de Heisenberg est donc une matrice 4×4.

a) Écrire la matrice 4×4 explicitement.

b) Montrez que

$$H = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2\hbar J \left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+ \right)$$

c) Poser $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et vérifiez les relations

$$\begin{array}{ll} \sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle & \sigma_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle \\ \sigma_+ |\uparrow\rangle = 0 & \sigma_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \\ \sigma_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle & \sigma_- |\downarrow\rangle = 0 \end{array}$$

Pour cette raison on appelle souvent σ_+ et σ_- les "raising and lowering operators".

d) Analysez l'action de H sur l'état dit "singulet"

$$\left|\psi_{0,0}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

et sur les états "triplets"

$$\begin{aligned} \left|\psi_{1,1}\right\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ \left|\psi_{1,0}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ \left|\psi_{1,-1}\right\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$

En déduire les niveaux d'énergie de H et les placer sur un axe (vertical).

e) On ajoute maintenant un champ magnétique extérieur $\vec{B} = (0, 0, B)$. L'hamiltonien total est maintenant

$$H = -\gamma_1 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_1 - \gamma_2 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_2 + \hbar J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

On posera $\gamma_1 B = \hbar\omega_1$ et $\gamma_2 B = \hbar\omega_2$. Ecrire la matrice 4×4 explicitement. On regarde maintenant le cas $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ (ou $\gamma_1 = \gamma_2$). En utilisant directement d) donnez les valeurs et vecteurs propres et faîtes un graphe des niveaux d'énergie en fonction de B.