Série 2
Traitement Quantique de l'Information II

1 Variation sur le problème de Deutsch-Josza

En 1993 E. Bernstein et U. Vazirani (Proc, 25th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM Press, NY p11-20) formulèrent le problème suivant. On se donne un "oracle" qui calcule

$$f(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x} \oplus b \mod 2$$

pour chaque entrée $\underline{x} \in \mathbb{F}_2^n$. Ici $\underline{a} \in \mathbb{F}_2^n$ et $b \in \mathbb{F}_2$. Le but est de calculer $\underline{a}$ en posant le moins de questions possibles à l'oracle.

a) Combien de questions faut-il poser à l'oracle pour déterminer $\underline{a}$ classiquement?

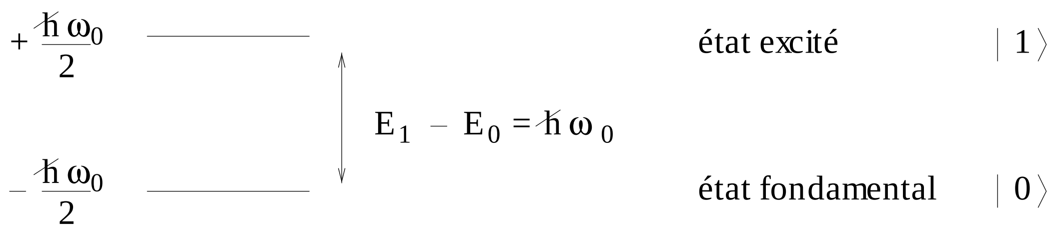
b) Montrer que grâce au circuit de Deutsch-Josza, il suffit de poser une seule question à "l'oracle quantique" pour déterminer $\underline{a}$.

Indication: il sera utile de montrer que

$$\sum_{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{\underline{x} \cdot \underline{z}} = \begin{cases} 2^n & \text{si } \underline{z} \in (0, 0, ..., 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2 Rappel sur les oscillations de Rabi dans les systèmes à deux niveaux

Les "systèmes à deux niveaux" sont l'incarnation du concept de "quantum bit". En physique quantique un système à deux niveau est un système possédant deux niveaux d'énergie $E_0 < E_1$. On posera $E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$ et $E_0 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$, $E_1 = +\frac{\hbar\omega_0}{2}$.



L'Hamiltonien du système (isolé) est

$$H_0 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| + \frac{\hbar\omega_0}{2}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right| = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix}$$

Ce système peut être soumis à une perturbation extérieure. L'Hamiltonien le plus général de cette perturbation est

$$H_1 = A\left|0\right\rangle\left\langle 1\right| + \overline{A}\left|1\right\rangle\left\langle 0\right| = \begin{pmatrix} 0 & A \\ \overline{A} & 0 \end{pmatrix}$$

Si cette perturbation dépend du temps, A est une fonction du temps $A(t)$.

L'Hamiltonien total du système à deux niveaux plus perturbation est

$$H = H_0 + H_1$$

2.1 Exemples

Spin 1/2**:** L'exemple canonique est le spin 1/2 (ou le moment magnétique d'un noyau atomique mettons) dans un champ magnétique de la forme $\overrightarrow{B}_0 + \overrightarrow{B}_1$ avec $\overrightarrow{B}_0 = (0,0,B)$ et $\overrightarrow{B}_1 = (B_1 \cos\omega t, B_1 \sin\omega t, 0)$. On a $H = -\overrightarrow{M}\cdot\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{M}\cdot\overrightarrow{B}_0 - \overrightarrow{M}\cdot\overrightarrow{B_1}$, avec $\overrightarrow{M} = \frac{g\hbar}{2}\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{S} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Cela donne finalement

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}\left(\sigma_+ e^{i\omega t} + \sigma_- e^{-i\omega t}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{i\omega t} \\ -\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Atomes piégés: Un autre système physique important qui peut être parfois modélisé par cet hamiltonien est un atome placé dans un champ électrique oscillant avec une fréquence réglée sur une fréquence atomique. Un atome est constitué de plusieurs niveaux d'énergie

$$E_0 < E_1 < E_2 < E_3 ...$$

(une infinité en fait) qui correspondent aux différents "états excités" du nuage électronique autour du noyau. Les différences entre niveaux d'énergie $E_j - E_i = \hbar\omega_{ji}$ correspondent aux fréquences ω_{ji} des photons que l'atome peut absorber et/ou émettre.

Si on soumet l'atome à une champ électrique de fréquence ω proche de ω_{10}, "essentiellement" l'interaction entre le champ électrique oscillant et le nuage électronique de l'atome fait intervenir uniquement les niveaux d'énergie E_0 et E_1 (fondamental et premier état excité). Le champ électrique oscillant produit des réarrangements du nuage électronique et est responsable de transitions entre les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. La perturbation oscillante peut être modélisée par

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{i\omega t} \\ -\frac{\hbar\omega_1}{2}e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar\omega_1}{2}\left(\sigma_+ e^{i\omega t} + \sigma_- e^{-i\omega t}\right)$$

où ω est la fréquence du champ électrique et ω_1 est lié à l'intensité de ce champ électrique (en fait cette interaction provient d'une interaction de type $\vec{E} \cdot \vec{d}$ où $\vec{d}$ = dipôle électrique de l'atome et $\vec{E}$ = le champ électrique).

Tout compte fait cette situation (atome + champ électrique oscillant) est modélisée par un Hamiltonien total H formellement identique au cas (spin + champ magnétique).

2.2 Remarque finale

Le quantum bit basé sur les niveaux d'énergie atomique a été réalisé avec des atomes piégés dans les "cavité micro-onde résonantes" (cavity QED) où l'on utilise les niveaux d'énergie atomiques.

Une autre réalisation est basées sur les "pièges à ions" où on utilise la structure électronique "hyperfine" correspondant à des différences d'énergie beaucoup plus petites. Là, le champ électrique oscillant est celui d'un laser.

2.3 Étude de la dynamique générale

Celle-ci est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

a) Montrez que cette équation implique $\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 0$ ce qui signifie $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle$. Ainsi on peut écrire

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|\psi(0)\rangle$$

où $U(t,0)$ est unitaire c'est-à-dire $U^\dagger U = UU^\dagger = I$.

b) Montrez que $U(t,0)$ satisfait à

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t,0) = H(t)\, U(t,0)$$

c) Vérifiez que si H est indépendant du temps:

$$U(t,0) = \exp\left(-\frac{itH}{\hbar}\right)$$

Est-ce que cette formule est valable si H dépend lui-même du temps?

d) Donnez $U_0(t,0)$ et $|\psi(t)\rangle$ pour un système à deux niveaux isolé (uniquement l'Hamiltonien H_0). Représentez $|\psi(t)\rangle$ sur la sphère de Bloch (cas du spin 1/2 par exemple). En déduire que $\exp\left(i\frac{\varphi}{2}\sigma_z\right)$ représente un opérateur de rotation (dans l'espace de spin) d'angle φ autour de l'axe z. En fait $\exp\left(i\frac{\varphi}{2}\sigma_z\right)$ et $\exp\left(i\frac{\psi}{2}\sigma_y\right)$ sont les opérateurs de rotation d'angle θ et ψ autour de x et y et plus généralement $\exp\left(i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$ est l'opérateur de rotation d'angle θ autour de l'axe $\vec{n}$ (=vecteur unité) sur la sphère de Bloch.

e) Faire le changement de référentiel

$$\left|\widetilde{\psi}(t)\right\rangle = e^{i\frac{t}{\hbar}K}\left|\psi(t)\right\rangle;\ K = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega}{2} \end{pmatrix}$$

(qui correspond à "s'attacher" au champ tournant $\vec{B}_1$) et écrire l'équation de Schrödinger pour $\left|\widetilde{\psi}(t)\right\rangle$. Montrez que l'Hamiltonien correspondant est

$$\widetilde{H} = \frac{\hbar}{2}\delta\sigma_z - \frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_x$$

où $\delta = \omega - \omega_0$ est appelé "detuning".

Notez que $\widetilde{H}$ est indépendant du temps. Expliquez pourquoi en mots.

f) Cas non résonant: Soit $\delta \neq 0$ et soit $\hbar\omega << \hbar\delta$. Donnez une image qualitative de la dynamique du spin sur la sphère de Bloch (pas de calculs).

g) Cas résonant: Soit $\delta = 0$, c'est-à-dire $\omega = \omega_0$. Donnez l'image qualitative de la précession du spin dès que $\hbar\omega_1 \neq 0$. Quelle est l'image pour $\hbar\omega_1 >> \hbar\delta$.

i) On veut maintenant calculer $U(t,0)$ pour l'Hamiltonien total $H(t) = H_0 + H_1(t)$. Notez que $|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}K\right)\left|\widetilde{\psi}(t)\right\rangle$ et déduisez de la relation précédente que

$$U(t,0) = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}K\right)\exp\left(-\frac{it}{\hbar}\widetilde{H}\right)$$

Ensuite nous voulons développer explicitement le terme $\exp\left(-\frac{it}{\hbar}K\right)$. Pour cela commencez par calculer $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2$, où $\vec{n}$ est un vecteur unité, puis utilisez ce resultat pour démontrer la formule suivante:

$$\exp(i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = I\cos\varphi + i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\varphi$$

Finalement utilisez la relation précédente en trouvant $\vec{n}$ et φ tel que $i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = -\frac{it}{\hbar}K$.

j) Soit maintenant $\delta = 0$, le cas résonant. Comment choisir t pour que $U(t,0) =$ NOT et/ou Hadamard.

k) Application numérique dans le cas du moment magnétique du proton: ce cas est typique pour les applications de la RMN car le proton est le noyau de l'atome d'hydrogène (présent dans H_2O par exemple). On a $\vec{M}_{proton} = \frac{1}{2}\gamma_p\vec{\sigma}$ avec $\gamma_p = 5.59\frac{e\hbar}{2m_p}$ où e est la charge, $\hbar$ la constante de planck et m_p la masse du proton. Cela donne $\mu_{proton} \simeq 1,4\cdot 10^{-28}$Joules/Tesla (Notez que l'électron $\gamma_e \simeq 2,02\frac{e\hbar}{2m_e}$ et $m_p \simeq 1000m_e$). Le champ magnétique employé en RMN est $B_0 \simeq 10$ à 14 Tesla (environ 10^4 fois plus que le champ terrestre). Estimez la différence d'énergie $\hbar\omega_0$ et la fréquence $\frac{\omega_0}{2\pi}$ en Hz. (Prendre $\hbar \simeq 1.05\cdot 10^{-34}Js$). Estimez l'intensité du champ B_1 pour obtenir des portes quantiques fonctionnant en un temps $\simeq 10\cdot 10^{-6}s$ (dizaine de microseconde) dans le cas résonant.