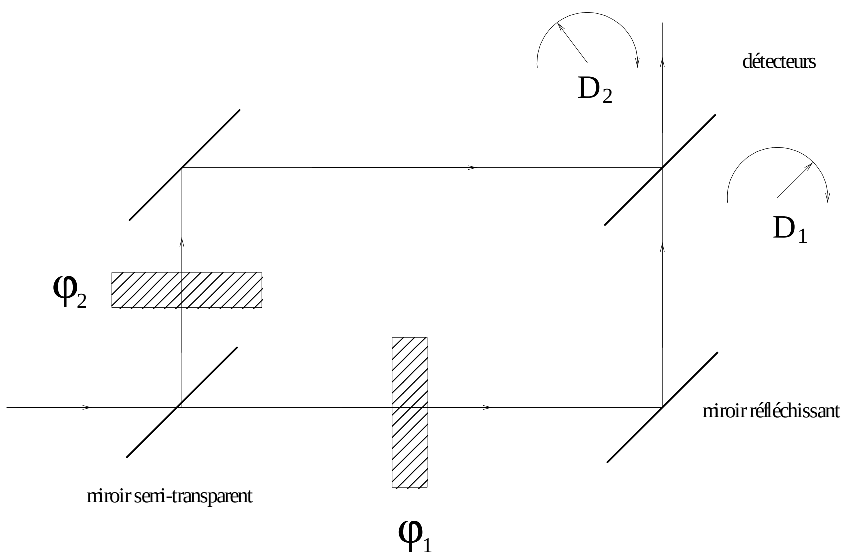
Homework 1
Traitement quantique de l'information II

1 Interféromètre de Mach-Zehnder



Une source de photons unique envoie un photon dans l'interféromètre. Le photon passe à travers un miroir semi-transparent, puis est déphasé par les déphaseurs $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$, puis est réfléchi par les miroirs réfléchissants et enfin passe à travers le dernier miroir semi-transparent. Le processus de mesure correspond à une détection dans les photo-détecteurs D_1 et D_2.

On veut calculer la probabilité de détection dans D_1 et D_2 en fonction des déphasages associés à chaque chemin $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$.

On admettra que l'espace de Hilbert du photon est égal à $\mathbb{C}^2 = \{\alpha\,|h\rangle + \beta\,|v\rangle\}$ ou $|h\rangle$ et $|v\rangle$ sont les deux états de la direction de la vitesse "horizontale" et "verticale".

1. Donnez l'état initial, l'état après le premier miroir semi-transparent, l'état après les déphaseurs, l'état après les miroirs réfléchissants et enfin l'état final après le deuxième miroir semi-transparent (mais avant la mesure).

2. Calculez la probabilité de détection dans D_1 et/ou D_2. Que notez-vous de spécial dans sa dépendance en fonction de φ_1 et φ_2.

3. Donnez le circuit quantique correspondant et rediscutez le calcul du point 1 et 2.

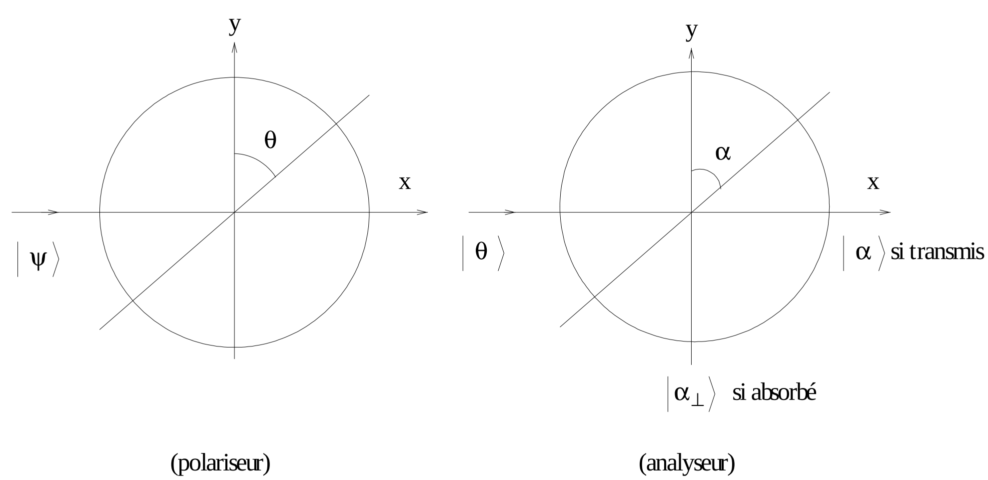
2 Photons et Particles Classiques

On rappelle qu'un photon se propageant dans la direction z possède deux degrés de liberté de polarisation $|x\rangle$ et $|y\rangle$ appelés polarisation horizontale et verticale.

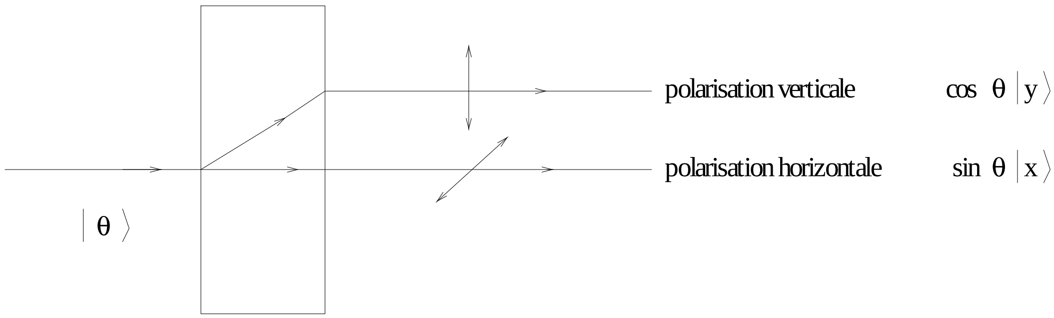
1. Un polariseur linéaire d'angle θ prépare les photons dans l'état $|\theta\rangle = \sin\theta\,|x\rangle + \cos\theta\,|y\rangle$. Un analyseur d'angle α projette un photon sur l'état $|\alpha\rangle$ ou $|\alpha_\perp\rangle$ avec probabilité $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2$ et $|\langle\alpha_\perp|\theta\rangle|^2$. Ici

$$|\alpha\rangle = \sin\alpha\,|x\rangle + \cos\alpha\,|y\rangle$$
$$|\alpha_\perp\rangle = -\cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle$$

Calculez la probabilité $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2$ et $|\langle\alpha_\perp|\theta\rangle|^2$.



2. Une lame biréfringente décompose un faisceaux en deux, suivant la polarisation.



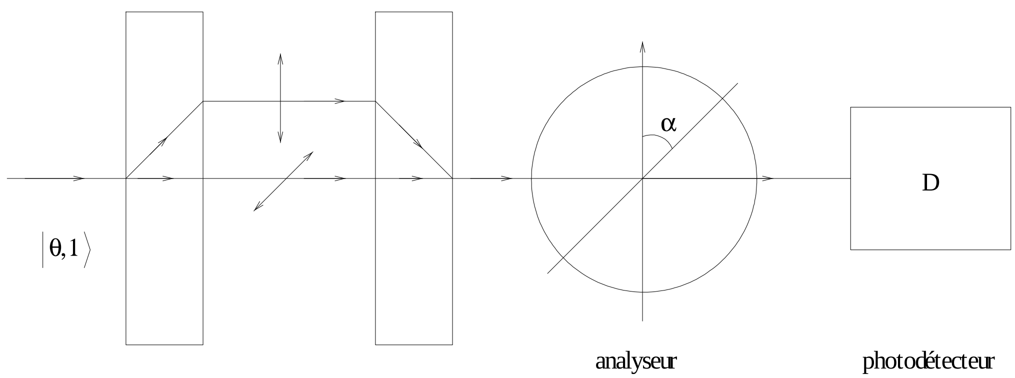
En réalité pour décrire ce processus il faut prendre l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ avec $\mathbb{C}^2$ = *espace de polarisation et* $\mathbb{C}^2$ = *espace de trajectoire inférieure et supérieure* (traj 1 et 2). L'état après la lame biréfringente est:

$$\sin\theta\,|x,1\rangle + \cos\theta\,|y,2\rangle$$

C'est en fait un état intriqué entre le degré de liberté de polarisation et de position.

Quelle est la probabilité d'observer le photon sur la trajectoire 1? et sur 2? (On suppose que l'on a placé deux photodétecteurs sur ces trajectoires).

3. On place maintenant une deuxième lame biréfringente symétrique.



Quel est l'état du photon après la deuxième lamme? (avant la mesure). Calculer la probabilité de détection dans l'appareil de mesure et montrer qu'elle vaut $\cos^2(\theta - \alpha)$.

4. On veut maintenant calculer cette dernière probabilité en imaginant que l'on envoie une "particule classique" à la place du photon (p. ex. une balle de fusil

ou une boule de canon). On admettra que lors du passage dans la première lame biréfringente le photon a une probabilité $\sin^2\theta$ d'emprunter la trajectoire 1 et une probabilité $\cos^2\theta$ d'emprunter la trajectoire 2 (si vous avez répondu à la question 2) ceci devrait paraître naturel). De plus on admet qu'une "particule polarisée" selon x a une probabilité $\sin^2\alpha$ de traverser l'analyseur et une "particule polarisée" selon y a une probabilité $\cos^2 a$ de traverser l'analyseur.

Etant donné ces hypothèses calculer la probabilité de détecter le photon dans le photodétecteur et montrer qu'elle vaut $\left(\cos^2\theta\cos^2 a + \sin^2\theta\sin^2\alpha\right)$. Comparez au résultat quantique et commentez.