ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
School of Computer and Communication Sciences

Handout 10 Introduction to Communication Systems
Solution 5 October 29, 2009

Problème 1

i) Le système S n'est pas causal car les signaux possède une réponse avant même d'avoir atteint leur première valeure non-nulle.

ii) Le système S n'est pas linéaire car l'addition du signal $x_1(n) + x_2(n) = x_3(n)$ mais $y_1(n) + y_2(n) \neq y_3(n)$

iii) On ne peut rien dire sur l'invariance dans le temps: malgrès le fait que $x_2(n) = x_1(n-2)$ et $y_2(n) = y_1(n-2)$, cette relation doit être vraie pour tout les signaux ce qui n'est pas possible à vérifier sur trois figures...

Problème 2

i) pour tout nombre réel a, b et tout signaux $x_1(m)$, $x_2(m)$, la linéarité est définie par

$$\begin{aligned} S\left[ax_1(m) + bx_2(m)\right](n) &= aS\left[x_1(m)\right](n) + aS\left[x_2(m)\right](n) \\ &= ay_1(n) + by_2(n). \end{aligned}$$

ii) pour tout signal $x(m)$ et tout nombre entier N, l'invariance dans le temps est définie par

$$\begin{aligned} S\left[x(m-N)\right](n) &= S\left[x(m)\right](n-N) \\ &= y(n-N) \end{aligned}$$

C'est-à-dire que si l'on transforme un signal translaté, c'est pareil que de translater le signal original.

iii) Si le système est invariant dans le temps alors il doit l'être pour tout signal et en particulier pour le signal $\delta(m)$. On doit donc nécessairement avoir

$$S\left[\delta(m-N)\right](n) = S\left[\delta(m)\right](n-N) = h(n-N)$$

iv) Nous avons vu qu'un signal peut s'écrire sous la forme $x(m) = \sum_k x(k)\,\delta(m-k)$ où les $x(k)$ ne sont plus que des coefficients (nombres) et $\delta(m-k)$ le signal impulsion translaté d'un facteur k. Alors

$$\begin{aligned}
S[x(m-N)](n) &= S\left[\sum_k x(k)\,\delta(m-N-k)\right](n) \\
&= \sum_k x(k)\,S[\delta(m-N-k)](n) \\
&= \sum_k x(k)\,S[\delta(m)](n-N-k) \\
&= \sum_k x(k)\,S[\delta(m-k)](n-N) \\
&= S\left[\sum_k x(k)\,\delta(m-k)\right](n-N) \\
&= S[x(m)](n-N)
\end{aligned}$$

Problème 3

i) Un système S est stable si pour tout signal x pour lequel chaque m, $|x(m)| < N$ alors pour chaque n on doit avoir $|y(n)| < M$. Autrement dit si toutes les valeurs d'un signal sont plus petite qu'un nombre N, alors toutes les valeurs du signal de sortie sont plus petites qu'un nombre M.

ii) Si $|x(k)| < N$ alors

$$\begin{aligned}
|y(n)| &= |S[x(m)](n)| \\
&= \left|S\left[\sum_k x(k)\,\delta(m-k)\right](n)\right| \\
&= \left|\sum_k x(k)\,S[\delta(m-k)](n)\right| \\
&= \left|\sum_k x(k)\,S[\delta(m)](n-k)\right| \\
&= \left|\sum_k x(k)\,h(n-k)\right| \\
&\leq \sum_k |x(k)\,h(n-k)| \\
&= \sum_k |x(k)|\,|h(n-k)| \\
&< N\sum_k |h(n-k)| \\
&< NL
\end{aligned}$$

Donc en choisissant $M = NL$ on obtient $|y(n)| < M$ si $|x(k)| < N$.

Problème 4

i) Supposons que r est rationel et donc s'écrive comme le rapport de deux entiers sans diviseur commun $r = \frac{p}{q}$. Alors comme comme r multiplié par tout entier doit rester un entier, nous pouvons choisir en particulier $n = 1$ et alors $\frac{p}{q}$ doit être entier. Ce qui veut dire que $q = 1$ et en definitive $r = p$ est un entier.

ii) Le signal échantilloné est simplement $\overline{x}(n) = x(T_s n) = \sin(2\pi f T_s n)$

iii) On veut pour différentes fréquences de sinusoïde f et f_P, un signal échantilloné identique:

$$\sin(2\pi f T_s n) = \sin(2\pi f_P T_s n)$$

ceci implique que

$$2\pi f T_s n = 2\pi f_P T_s n + 2\pi k$$

où k est un entier. Alors nous avons pour tout valeur de n

$$(f - f_p) T_s n = k.$$

Grâce au point i) nous pouvons dire que $(f - f_p) T_f$ doit lui-même être un entier m et alors la condition peut s'écrire:

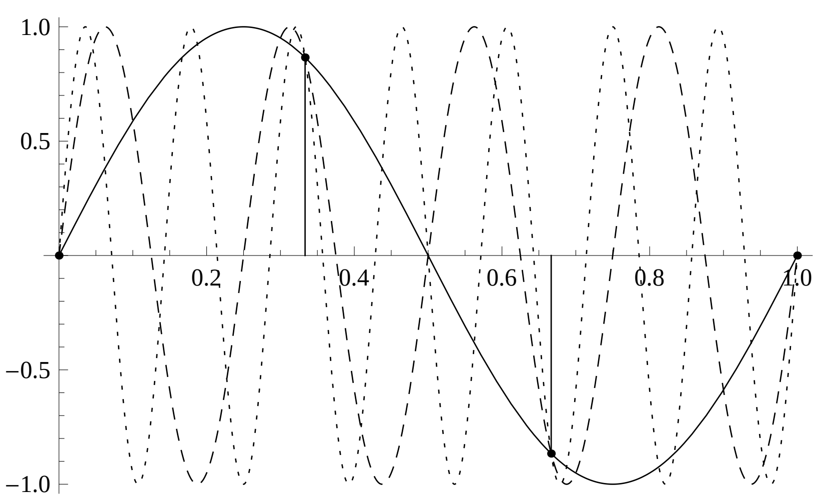
$$(f - f_p) T_s = (f - f_p) \frac{1}{f_s} = m$$

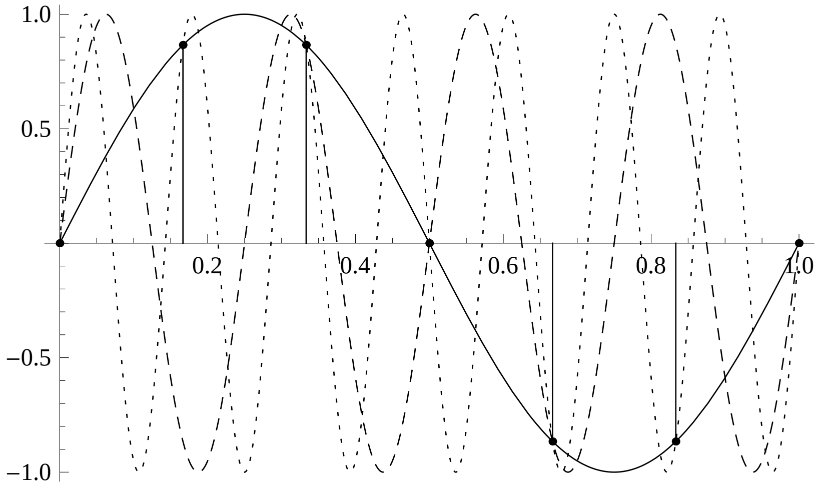
ou encore

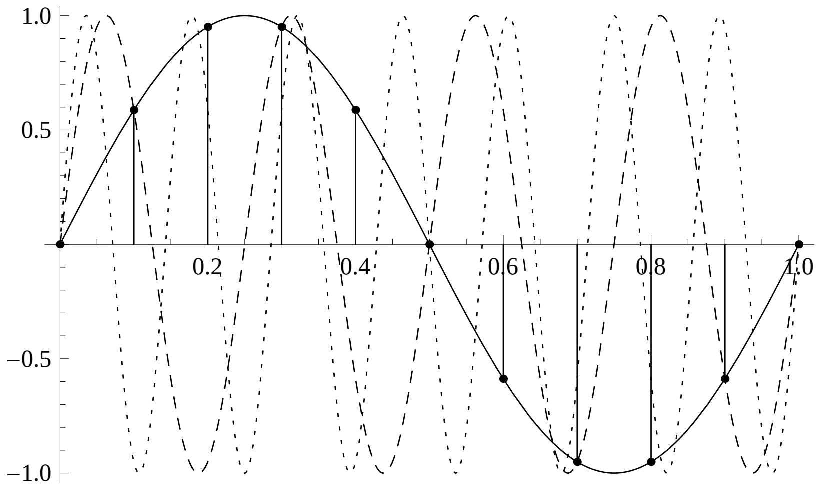
$$f - f_P = m\frac{1}{Ts} = m f_s.$$

iv) Les fréquence des différents signaux sont $f_1 = 1$, $f_2 = 4$ et $f_3 = 7$. Donc si la fréquence d'échantillonage est $f_s = 3$, nous avons $\frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{3}{3} = 1$ et $\frac{f_3 - f_1}{f_s} = \frac{6}{3} = 2$. Toutes les sinusoïdes ont le même échantillonage. Si $f_s = 6$ nous avons $\frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\frac{f_3 - f_1}{f_s} = \frac{6}{6} = 1$, et alors seule la première et la dérnière sont identiques après échantillonage. Et finalement avec $f_s = 10$, nous avons $\frac{f_2 - f_1}{f_s} = \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$ et $\frac{f_3 - f_1}{f_s} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$: Tout les échantillonages sont différents.

v)




1.0
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−0.5
−1.0


1.0
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−0.5
−1.0