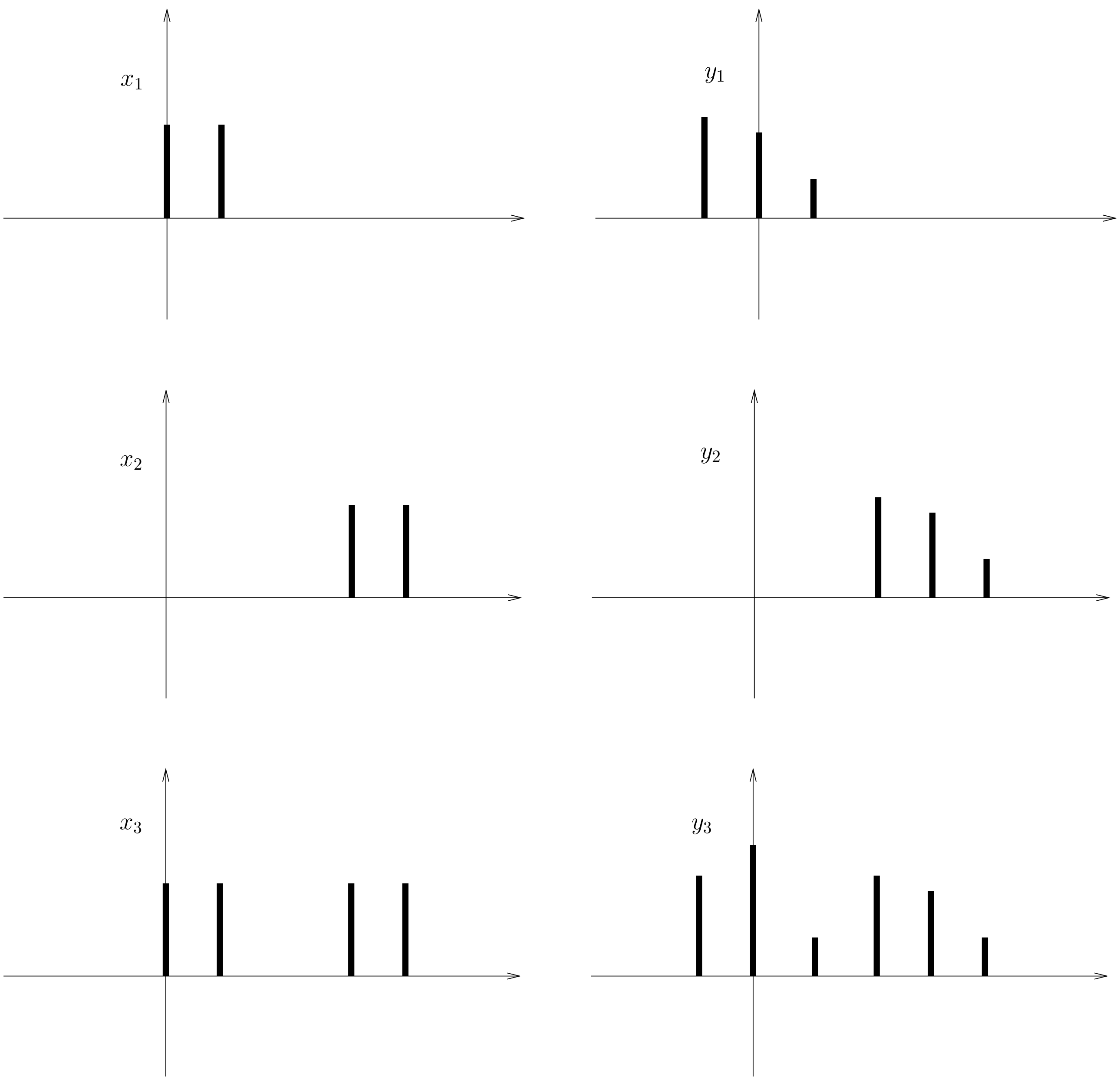
ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE
School of Computer and Communication Sciences

Handout 9 Introduction to Communication Systems
Homework 5 October 22, 2009

1 Problème 1

Pour connaître le comportement d'un système S nous envoyons trois différents signaux . Les figures suivantes représentent les entrées $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$ et leurs sorties correspondantes $y_1(n)$, $y_2(n)$, $y_3(n)$.



En se basant sur ces figures, peut-on dire si

i) Le système S est causal?

ii) Le système S est linéaire?

iii) Le système S est invariant dans le temps?

2 Problème 2

Remarque sur les notations de la série: Si l'on a un signal $x(m)$, la sortie est notée $y(n) = S[x(m)](n)$, car on donne tout le signal x dans une fonction S (i.e. $S[x(m)]$) puis l'on demande le $n$ième élément de la valeur de retour de cette fonction (donc le $n$ième éléments du signal de sortie y). On peut voir une analogie avec la notation pour les primitives $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$; la variable t d'intégration est muette mais on la représente pour indiquer que c'est sur cette variable que l'intégration est effectuée.

Le signal $\delta(m)$ représente l'impulsion unité centrée en zéro i.e. $\delta(0) = 1$ et zéro autrement. De plus le signal $h(n)$ représente la sortie de l'impulsion unité dans le système i.e. $h(n) := S[\delta(m)](n)$

i) Sous quelle(s) condition(s) un système $S[x(m)](t) = y(n)$ est linéaire?

ii) Sous quelle(s) condition(s) un système $S[x(m)](t) = y(n)$ est invariant dans le temps?

iii) Si S est linéaire, montrez que la condition "pour tout N fixé $S[\delta(m-N)](n) = S[\delta(m)](n-N)$" est nécessaire pour que le système soit invariant dans le temps.

Astuce: trouver un exemple de signal d'entrée pour lequel cette condition doit être vraie.

iv) Si S est linéaire, montrez que la condition "pour tout N fixé $S[\delta(m-N)](n) = S[\delta(m)](n-N)$" est suffisante pour que le système soit invariant dans le temps.

Astuce: écrire le signal sous la forme d'une somme d'impulsions unité i.e. $x(m) = \sum_k x(k)\,\delta(m-k)$ et $x(m-N) = \sum_k x(k)\,\delta(m-N-k)$.

3 Problème 3

i) Donner la définition d'un système stable.

ii) Pour un système linéaire et invariant, montrez que la condition $\sum_n |h(n)| = L < \infty$ est suffisante pour que le système soit stable.

Astuce: utilisez l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire $|a_1 + a_2 + a_3 + ...| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + ...$ Exemple: $4 = |1-2-3| \leq |1| + |-2| + |-3| = 6$.

4 Problème 4

i) Question utile pour la suite de l'exercice: Soit un nombre $r \in \mathbb{R}$ possèdant la propriété suivante: pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $r \cdot n \in \mathbb{Z}$ (c'est-à-dire, si l'on multiplie r par n'importe quel entier, il reste un entier). r peut-il être n'importe quel rationel ou seulement un entier?

Astuce: pour savoir si r peut être un rationel, supposez qu'il peut s'écrire comme une fraction de deux nombres entiers et regardez si cela entraine une contradiction.

ii) Soit un signal sinusoïde $x(t) = \sin(2\pi f t)$. Donnez l'expression du signal $\overline{x}(n)$ échantilloné à la période $T_s = \frac{1}{f_s}$.

iii) Trouvez la condition pour que deux signaux $\sin(2\pi f t)$ et $\sin(2\pi f_P t)$ aient le même signal échantilloné.

Astuce: En s'aidant du point i) cherchez à résoudre $\sin(2\pi f T_f n) = \sin(2\pi f_P T_f n)$ pour tout n.

iv) Exemple: On a trois signaux, $\sin(2\pi f t)$, $\sin(8\pi t)$, $\sin(14\pi t)$ et on les échantillonent aux fréquences $f_s = 3$, $f_s = 6$, $f_s = 10$. Dans quels cas et pour quels signaux l'échantillonage est-il identique?

v) Dessinez les différents signaux avec les points d'échantillonage.